



Discrétisation spatio-temporelle du problème thermique à deux champs : application au procédé de forgeage à chaud

Céline Pelissou

► To cite this version:

Céline Pelissou. Discrétisation spatio-temporelle du problème thermique à deux champs : application au procédé de forgeage à chaud. Sciences de l'ingénieur [physics]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005. Français. NNT : 2005ENMP1326 . pastel-00001503

HAL Id: pastel-00001503

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00001503>

Submitted on 17 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

Céline Pelissou

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR

en

MÉCANIQUE NUMÉRIQUE

**Discrétisation spatio-temporelle du
problème thermique à deux champs.
Application au procédé de forgeage à chaud**

soutenue publiquement le 28 novembre 2005, devant le jury composé par :

M.	Uwe Ehrenstein	Rapporteur
M.	Frédérique Lebon	Rapporteur
M.	Jean-Loup Chenot	Examineur
M.	Michel Cristescu	Examineur
Mme	Elisabeth MASSONI	Directeur de thèse

à la mémoire des hommes de ma vie :

mon père Claude et de mon grand-père Marius

Remerciements

Avant tout, je tiens à témoigner de la profonde affection que j'éprouve pour ma mère, mon papi Marius et ma mamie Andrée qui m'ont toujours encouragé. Maman, je te suis très reconnaissant du soutien permanent et des nombreux conseils que tu m'as apporté durant toutes ces années d'études. j'en profite également pour remercier le reste de ma famille : mes grand-parents paternels, mon parrain, ma tante et mes deux cousins chéris.

Je remercie la Direction de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris de m'avoir permis d'effectuer ce travail de recherche au centre de Mise en Forme des Matériaux (CEMEF), dans l'équipe très sympathique (TMP) dirigée par Michel Bellet. Un grand merci tout particulier à Monsieur Jean-Loup Chenot, directeur du CEMEF, qui m'a accueilli dans son laboratoire, qui a suivi scrupuleusement l'avancée de mes travaux et qui m'a fait l'honneur d'être le président du jury.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de thèse Elisabeth Massoni qui m'a accordé sa confiance pendant ces 4 dernières années. Sa pédagogie, son expérience, sa démarche scientifique et ses qualités humaines ont largement contribué à une collaboration dès plus agréable, dynamique et très instructive malgré une disponibilité réduite.

Je tiens à remercier vivement tous les acteurs et collaborateurs du projet Simulforge, et particulièrement Karim Mahjoub, animateur du Groupe d'Etudes 6 sur le contrôle de la précision.

Un grand merci à Frédéric Lebon du Laboratoire de Mécanique Acoustique de Marseille et à Uwe Ehrenstein de l'Université de Nice qui ont accepté la lourde tâche de rapporteur ainsi qu'à Michel Cristescu du CETIM pour sa participation au jury.

Je souligne également la disponibilité, la joie de vivre et l'aide efficace du directeur administratif Patrick Coels, des secrétaires (Marie-Françoise Gueneguan, Sylvie Massol, Genieviève Anseeuw, Florence Morcamp, Ann-Marie Mule), de la gente masculine informatique (Manu Levrat et Valéry Lang), des bibliothécaires (Brigitte Anjubault et Sylvie Michel), du personnel de l'atelier (Marco, Eric, Roland) et de la reprographie (Muriel et Luisette).

Une petite pensée pour mes collègues de bureau (et du bureau mitoyen) qui ont réussi (tant bien que mal) à supporter le tempérament dynamico-duracel de la marseillaise joviale que je suis : Mehdi BT, Arnaud, Christian, Javier, Emeric, Claire B et Claire D (ainsi que Laurent, Benoît H, Danièle, Marianne).

Je voudrais remercier tous les encadrants (Michel Bellet, Katia Mocellin, Yvan Chastel, Lionel Fourment, François Bay, Roland Logé, ...) et tous les collègues que j'ai eu le plaisir de côtoyer au cours de ces quatre années passées au CEMEF. Je pense à mon quatuor de choc (Josh, Stef, Cyrillus, Olive) qui a été là quand j'en avais le plus besoin, Ramzy, Olga, Luisa, Sylvie, Hughes, Mehdi L, Audrey, Romain, Marianne, Abla, Eric, ... et à tous les autres que j'ai oublié de citer ...

Je salue également tous mes partenaires de pétanque qui se reconnaîtront (on en a fait des parties de rigolades : et ils sont où les mauvais perdants?), ainsi que mes coéquipiers de l'équipe de volley "ENSMP2" (rien de tel pour se défouler que de taper dans la baballe).

Une pensée plus nostalgique pour tous mes copains que je laisse ici sur la côte d'Azur : je veux parler de ma soeur niçoise Céline, de mon cuisto Christophe, de mon voyageur Rémi qui a toujours les mourennes, de mes "loulous" mouginssois (Damien et Laurent), de mon trio "bouliste" infernal (Martial-José-Ratoman) et de mes voisins volleyeurs/bellotistes Wali, Greg, Vincent, Igor, Jb, Djé et Ced.

Pour terminer, je félicite tout simplement le lecteur qui aura la curiosité (et le courage) de parcourir ce volumineux manuscrit. Je lui demande d'être clément s'il croise quelques erreurs oubliées.

Table des matières

Introduction générale	1
Cadre industriel des travaux	1
Logiciel Forge 3®	2
Contexte initial - Etat de l'art	2
Objectifs des travaux de thèse	3
Structure de l'exposé	4
1 Présentation du modèle thermique instationnaire	5
1.1 Modélisation lagrangienne du problème thermique	6
1.1.1 Equations régissant le problème thermique instationnaire	6
1.1.1.1 Equation de la chaleur	6
1.1.1.2 Loi de Fourier	7
1.1.2 Conditions initiales et conditions aux limites spatio-temporelles	8
1.1.2.1 Conditions initiales	8
1.1.2.2 Conditions aux limites	8
1.1.2.3 Cinématique du problème thermique	10
1.1.3 Formulation classique: une inconnue la température	10
1.1.4 Equations de la thermique adaptées à la simulation du procédé de forgeage	11
1.1.4.1 Sur les faces en contact avec les outils	11
1.1.4.2 Sur les faces libres	11
1.1.4.3 Récapitulatif	11
1.2 Résolution numérique du problème thermique	12
1.2.1 Résolution classique: la méthode Galerkin standard	12
1.2.1.1 Formulation variationnelle	12
1.2.1.2 Formulation variationnelle discrète	13
1.2.1.3 Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis	14
1.2.1.4 Intégration temporelle	15
1.2.1.5 Schéma d'intégration temporelle choisi [Soyris 1990]	16
1.2.1.6 Résolution numérique du système non linéaire	18
1.2.2 Limitations de la méthode de Galerkin	19
1.2.2.1 Problèmes à convection dominante: apparitions d'instabilités	19
1.2.2.2 Problèmes de diffusion pure: traitement du choc thermique	20
1.2.3 La thermique asynchrone	23
1.2.3.1 Principe: condition de profondeur de pénétration	23
1.2.3.2 Intégration de la thermique asynchrone dans un code 3D EF	24
1.2.3.3 Exemples d'utilisation de la thermique asynchrone pour un calcul 3D	25
1.2.4 Variation de la thermique asynchrone: la méthode de diffusion partitionnée (diffusion-split)	27
1.2.4.1 Principe	28
1.2.4.2 Exemple	29

1.2.5	Conclusion	30
1.3	Autres méthodes de résolution pour les problèmes de convection/diffusion	30
1.3.1	Formulation du problème de convection/diffusion	30
1.3.2	Les méthodes stabilisées	31
1.3.2.1	Les méthodes Streamline Upwind et Streamline Upwind Petrov Galerkin	32
1.3.2.2	La méthode Space-Time/Galerkin Least-Squares (ST/GLS) . . .	33
1.3.3	La méthode de Taylor Galerkin (TG)	35
1.3.3.1	Principe	35
1.3.3.2	Application à l'équation scalaire 1D de convection	36
1.3.3.3	Application au problème 3D de convection/diffusion	37
1.3.4	Quelques commentaires	38
1.3.4.1	Comparaisons des schémas Taylor Galerkin et de la méthode Galerkin Standard	38
1.3.4.2	Avantages et inconvénients des méthodes stabilisées	38
1.3.5	La méthode Galerkin Discontinue (GD)	40
1.3.5.1	Modèle spatial discontinu	40
1.3.5.2	Modèle spatio-temporel discontinu	45
1.3.5.3	Conclusion	49
1.4	Conclusions	50
2	Modélisation et résolution du problème thermique mixte instationnaire	53
2.1	Formulation mixte du problème thermique à 2 champs :	
	la température et le flux de chaleur	54
2.1.1	Equations	54
2.1.2	Conditions initiales et aux limites	54
2.1.2.1	Conditions initiales	54
2.1.2.2	Conditions aux limites	54
2.1.3	Formulation mixte	54
2.2	Résolutions numériques : méthodes de type Galerkin Discontinu	55
2.2.1	Le schéma Taylor Galerkin Discontinu Explicite : TGD	55
2.2.1.1	Discrétisation spatiale : schéma éléments finis discontinus	56
2.2.1.2	Schéma de discrétisation temporelle : Taylor explicite	59
2.2.1.3	Prise en compte des conditions aux limites thermiques	60
2.2.1.4	Validation du TGD sur des tests purement thermiques : compa- raison avec une solution analytique instationnaire	62
2.2.1.5	Etude bibliographique comparative	83
2.2.1.6	Bilan général	86
2.2.2	Le modèle Galerkin Discontinu Implicite : Gdimp	88
2.2.2.1	Schéma de discrétisation spatiale : l'élément fini mixte P_0/P_0^+ . .	88
2.2.2.2	Prise en compte des conditions aux limites thermiques et du terme source	95
2.2.2.3	Discrétisation temporelle : schéma d'Euler Implicite	98
2.2.2.4	Validation du Gdimp sur des tests purement thermiques : com- paraison avec une solution analytique instationnaire	100
2.2.2.5	Comparaison du Gdimp au modèle spatio-temporel combiné à l'élément P_0/P_0^+	110
2.2.2.6	Bilan général	111
2.2.3	Récapitulatif des modèles TGD et Gdimp	112

3	Résolution numérique par la nouvelle formulation Mixte continue P_1/P_1	115
3.1	Bibliographie sur les méthodes mixtes	116
3.1.1	Equations régissant les problèmes hyperboliques de conduction	116
3.1.2	Approche Galerkin Standard combinée à un θ —schéma	117
3.1.2.1	Formulation variationnelle	117
3.1.2.2	Discrétisation spatiale : éléments finis P_2/P_1 [Manzari 1998]	117
3.1.2.3	Schéma d'intégration temporelle : θ —schéma	118
3.1.2.4	Applications	119
3.1.2.5	Quelques remarques	119
3.2	Formulation proposée du problème thermique mixte	120
3.2.1	Réécriture de la formulation forte	120
3.2.2	Formulation variationnelle	121
3.2.3	Formulation variationnelle discrète	122
3.3	Discrétisation spatiale par éléments finis	122
3.3.1	Méthode des éléments finis mixtes P_1/P_1	123
3.3.2	Système d'équations différentielles	123
3.3.3	Bilan local de la discrétisation spatiale du problème thermique	125
3.4	Divers schémas pour l'intégration temporelle	128
3.4.1	Premier choix : schéma DF à trois pas de temps du second ordre	128
3.4.2	Deuxième schéma : schéma implicite à deux pas de temps	129
3.5	Traitement des conditions aux limites thermiques	129
3.5.1	Condition de Dirichlet : température ou flux de chaleur imposé(e)	130
3.5.2	Condition de conduction imposée	130
3.5.2.1	Interprétation de cette condition aux limites	130
3.5.2.2	Démarche envisagée	131
3.5.2.3	Démarche adoptée	132
3.5.2.4	Généralisation à la condition de convection/rayonnement	133
3.5.3	Résolution du système linéaire	133
3.6	Validations de la formulation Mixte P_1/P_1 sur des cas tests analytiques	134
3.6.1	Température imposée sur l'extrémité d'une barre d'acier	134
3.6.1.1	Analyse de sensibilité au schéma d'intégration temporelle	134
3.6.1.2	Etude complémentaire sur le test de température imposée : résultats numériques en température et flux	144
3.6.1.3	Validation du test de température imposée sur deux cas extrêmes	153
3.6.1.4	Conclusions	155
3.6.2	Flux imposé sur l'extrémité d'une barre d'acier	155
3.6.2.1	Cas standard	156
3.6.2.2	Sensibilité du modèle Mixte continu P_1/P_1	159
3.6.2.3	Conclusion	161
3.6.3	Conduction imposée sur l'extrémité d'une barre d'acier	162
3.6.3.1	Solution analytique	163
3.6.3.2	Visualisation des résultats	164
3.6.3.3	Sensibilité de la formulation Mixte au maillage et au pas de temps	166
3.6.3.4	Sensibilité de la formulation mixte au coefficient de transfert thermique h_c	167
3.6.3.5	Conclusion	168
3.6.3.6	Remarques	168
3.7	Bilan général	172

4	Couplage thermomécanique	175
4.1	Formulation et résolution du problème mécanique	176
4.1.1	Modélisation mécanique du forgeage	176
4.1.1.1	Equations de conservation	176
4.1.1.2	Lois de comportement	177
4.1.1.3	Conditions initiales et aux limites mécaniques	180
4.1.1.4	Contact et frottement : problèmes d'interface	181
4.1.1.5	Récapitulatif des équations mécaniques relatives au procédé du forgeage	182
4.1.2	Discrétisation du problème mécanique	183
4.1.2.1	Formulation faible mécanique	183
4.1.2.2	Discrétisation temporelle	183
4.1.2.3	Discrétisation spatiale	184
4.1.3	Résolution numérique	187
4.2	Couplage avec le problème thermique	189
4.2.1	Nature du couplage thermomécanique	189
4.2.1.1	Variables mécaniques thermodépendantes	189
4.2.1.2	Variables thermiques dépendant de la résolution mécanique	189
4.2.1.3	Problème thermomécanique lié à la simulation numérique du procédé de forgeage à chaud	190
4.2.2	Couplage thermomécanique	191
4.3	Simulations numériques : cas de forgeage	192
4.3.1	Diffusion d'un cube entre deux outils plans	192
4.3.1.1	Exemple d'applications : cas de double conduction à chaud	192
4.3.1.2	Solution analytique	193
4.3.1.3	Présentation des résultats numériques	193
4.3.1.4	Synthèse des quatre modèles thermiques	195
4.3.2	Test académique : compression de cylindre (Aubert & Duval)	196
4.3.2.1	Mise en données	196
4.3.2.2	Résultats numériques	198
4.3.2.3	Validation de la formulation Mixte continue	201
4.3.2.4	Conclusion	203
4.3.3	Compression du triaxe	203
4.3.3.1	Cas anisotherme	204
4.3.3.2	Cas de compression du triaxe	205
4.3.3.3	Conclusion	205
4.3.4	Bilan des validations thermomécaniques	206
4.4	Conclusion	206
	Conclusion générale	207
	Synthèse	207
	Perspectives	209
A	Schéma de discrétisation temporelle à trois pas de temps	211
B	Schéma Taylor Galerkin appliqué au problème scalaire 1D de convection	213
B.1	Technique basée sur un pas de temps "arrière" (explicite)	213
B.2	Technique basée sur un pas de temps "saute-mouton" (leap-frog)	214
B.3	Technique basée sur un pas de temps de Crank-Nicholson	215

C Analyse de sensibilité des paramètres k, ρ et c sur la solution numérique TGD "forgeage"	217
D Modèle spatio-temporel combiné à l'élément P_0/P_0^+	219
D.1 Principe	219
D.2 Discrétisation de l'équation de la chaleur avec une formulation espace/temps . .	219
E Test de compression du cylindre Aubert & Duval	223
E.1 Loi rhéologique point à point	223
E.2 Loi thermique point à point	224
Table des figures	229
Liste des tableaux	232
Bibliographie	233

Introduction générale

De nos jours, la modélisation numérique pour la simulation des procédés de mise en forme des matériaux occupe une place incontestable et incontournable dans la réalisation et la fabrication de produits de haute qualité devant répondre à des prix compétitifs sur le marché européen et international. C'est pourquoi, afin de réduire les coûts d'expérimentation, de fabrication et d'outillages, les départements de recherche et développement au sein des industries de forgeage ont de plus en plus recours aux outils de la simulation numérique.

La détermination de l'évolution de la température dans les pièces et dans les outils est indispensable à la modélisation correcte de tout procédé de mise en forme. Les phénomènes thermiques, comme l'échauffement, le refroidissement doivent être correctement calculés et prédits, avec la plus grande précision. Malheureusement, ce n'est pas toujours le cas et cette précision s'avère d'autant plus délicate et primordiale lorsque des couplages thermomécaniques très complexes sont pris en compte.

La détermination précise des champs de température dans une pièce, aussi bien au cours du procédé de forgeage que lors de traitements thermiques, est souvent un facteur clé pour la prévision des caractéristiques finales de la pièce. De même, la connaissance des températures maximales atteintes en tout point des outils est nécessaire pour évaluer puis optimiser leur durée de vie.

Cadre industriel des travaux

Les travaux présentés ici s'inscrivent dans le cadre du projet Simulforge, financé par le ministère de l'industrie et soutenu par l'Etat français à travers la Direction générale de l'industrie, des Technologies de l'information et des Postes (DiGITIP) en faisant partie des 119 technologies clés de 2005.

Ce grand projet national pluripartenaire a pour objectif d'améliorer un logiciel de simulation sur l'ensemble du processus de forgeage de pièces métalliques, en tenant compte de l'évolution du matériau au cours du processus : c'est le code éléments finis 3D Forge3[®], modélisant les procédés de mise en forme de pièces complexes, qui va bénéficier de toutes ces modifications et améliorations.

Recouvrant les domaines de recherche en métallurgie, mécanique et modélisation, Simulforge regroupe de nombreux partenaires industriels (Aubert & Duval, Snecma Moteurs, Setforge, Ascoforge, Usinor Industeel, Estamfor, PSA, SNR Roulements,...), plusieurs laboratoires de recherche dont le CEMEF (Centre de Mise en Forme des Matériaux), avec la collaboration du Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM) et de la société d'éditions de logiciels Transvalor (valorisant les développements numériques des doctorants du CEMEF en les intégrant dans une version commercialisée de Forge3[®]).

Six groupes d'étude (Ge) constituent ce consortium dont le Ge6, ayant pour but de contrôler la précision au sens large de Forge 3[®], avec plusieurs programmes, tels que l'analyse de sensibilité [Laroussi 2003] ou encore l'adaptation du maillage à l'aide d'estimateur d'erreur [Bousseta 2005]. L'un de ces programmes, axé sur l'amélioration de la résolution de l'équilibre thermique, fait l'objet de ma thèse.

Logiciel Forge 3[®] monocorps

Le CEMEF a développé et continue encore aujourd'hui le développement de deux codes de simulation numérique du forgeage : Forge 2[®] pour des cas bidimensionnels et Forge 3[®] pour des cas tridimensionnels. Une première version industrielle de Forge 3[®] fit son apparition en 1991. Aujourd'hui, il existe deux versions distinctes :

- la version monocorps qui suit uniquement les évolutions thermiques et les déformations dans la pièce, les outils sont indéformables.
- la version multicorps qui suit à la fois les évolutions thermiques et les déformations dans la pièce et les outils devenus déformables.

Les procédés industriels auxquels se destine Forge 3[®] sont les suivants :

- Les procédés de forgeage qui consiste en l'écrasement de lopins métalliques pour leur donner une forme géométrique complexe par déformation plastique. Suivant la température, on distingue :
 - * Le forgeage à chaud pour une température supérieure à $0,5 T_f$, T_f la température de fusion du métal considéré.
 - * Le forgeage à tiède et mi-chaud pour une température voisine de $0,3 T_f$.
 - * Le forgeage à froid qui se fait à température ambiante.
- Les procédés de mise en forme assimilables au forgeage tels que le matriçage, l'estampage ou encore le laminage.
- Les traitements thermiques par le processus de trempe.
- L'emboutissage.
- L'hydroformage.
- L'extrusion.
- Le formage superplastique.
- Le soudage.
- etc...

Contexte initial - Etat de l'art

Au moment où cette thèse est lancée, la fiabilité du solveur thermique de Forge 3[®] est remise en cause sur diverses simulations (problème de dimensionnement de la pièce, souvent très complexe et de taille massive, choix du maillage de la pièce, problème de frottement et donc de réchauffement dans les zones de contact entre la pièce et les outils,...). En effet, l'approche actuelle est une formulation de type Galerkin mise en oeuvre par [Soyris 1990] où l'inconnue est la température. Cette formulation est économique en temps de calcul lorsqu'il n'y a pas de choc thermique. En revanche, lorsqu'une pièce chaude entre en contact avec un outil froid, des oscillations non physiques de la température sont observées. On aurait alors besoin d'introduire des tailles de maille extrêmement réduites au voisinage de l'interface, non réalistes actuellement pour des pièces 3D de grande envergure. Les remèdes actuellement préconisés (méthodes stabilisées) pour éviter ces oscillations ne garantissent cependant pas une bonne précision. Il apparaît

donc souhaitable de s'orienter vers une formulation mixte en température et en flux de chaleur développée par [Pichelin 1998].

Des développements récents du CEMEF dans le domaine de la simulation des phénomènes thermiques ont été effectués dans le cadre de la thèse de Charles Aliaga [Aliaga 2000] pour la simulation des traitements thermiques (figure 1.a) ainsi qu'au cours de la thèse d'Olivier Jaouen [Jaouen 1998] pour la simulation du refroidissement des pièces en fonderie. En particulier, la simulation de la trempe met en jeu des difficultés numériques liées à la nature de forts gradients thermiques impliqués (pièce très chaude plongée dans un bain de trempe, à température bien plus froide). C'est pourquoi des méthodes numériques ont été développées pour stabiliser les chocs thermiques.

Ces améliorations n'ont cependant été validées que dans le cadre des traitements thermiques, c'est à dire en présence de faibles déformations ne nécessitant pas de remaillage mécanique et sans contact avec les outils. Il s'agit donc dans ce travail de thèse d'adapter les développements récents dans le domaine de la simulation des effets thermiques au procédé de forgeage à chaud (figure 1.b).

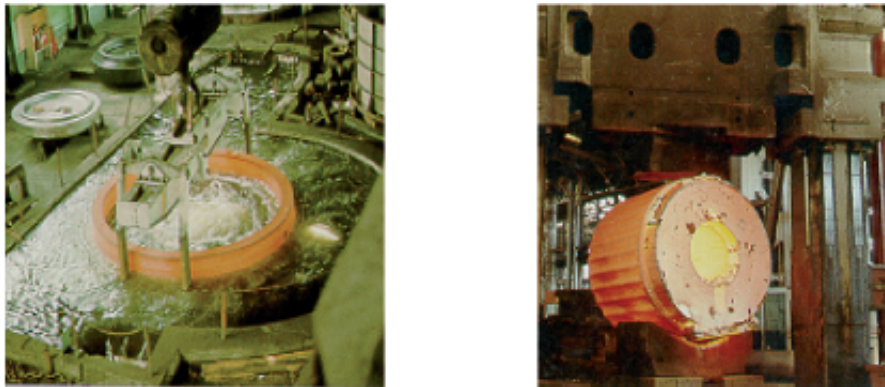


FIG. 1 – Couplage thermomécanique: a) Trempe, b) Forgeage.

Objectifs des travaux de thèse

L'amélioration des calculs thermiques dans le logiciel Forge3[®] devra tenir compte des forts couplages entre la mécanique, la thermique, les problèmes de maillage et de chocs thermiques. Cette amélioration, qui pourra par la suite s'adapter à d'autres codes de mise en forme, devra à la fois concerner les simulations de procédés de forgeage mais également les étapes de traitements thermiques. Cela sous-entend de considérer des chocs thermiques importants et de petites déformations pour les traitements thermiques (figure 1.a), mais aussi des grandes déformations, le contact avec les outils (et donc le couplage mécanique) ainsi que les couplages de transferts thermiques entre la pièce et les outils pour le forgeage (figure 1.b).

L'objectif de cette thèse consiste donc principalement à mettre au point une méthode de résolution des équations thermiques avec un bon compromis entre la précision et le temps de calcul, tout en tenant en compte de forts couplages mécaniques qui proviennent de la résolution de l'équilibre mécanique. Autrement dit, la résolution thermique sera couplée fortement avec la résolution de l'équilibre mécanique.

Ce programme de thèse devra permettre, à terme, d'avoir la possibilité de choisir entre divers solveurs thermiques numériques suivant les besoins de l'utilisateur en précision et/ou temps de calcul.

Structure de l'exposé

Quatre chapitres composent ce manuscrit.

- **Le premier chapitre** (p.5) sera consacré à la modélisation et à la formulation du problème thermique instationnaire que l'on souhaite résoudre, avec un seul champ inconnu la température. La résolution numérique de ce problème sera ensuite abordée par l'approche classique de Galerkin. La littérature, très riche dans ce domaine, nous permettra de faire un tour d'horizon des différentes techniques de résolution, d'établir une comparaison approfondie de certaines d'entre elles et d'opter pour une écriture mixte du problème thermique.

Les deux chapitres suivants s'orienteront vers la résolution numérique de ce problème thermique mixte instationnaire en température et flux de chaleur, avec le développement et l'implémentation de trois modèles numériques.

- **Le deuxième chapitre** (p 53) décrira deux modèles basés sur la méthode de Galerkin Discontinue et l'élément fini constant P_0 . Nous adapterons, dans un premier temps, le schéma Taylor Galerkin explicite (TGD), introduit par [Pichelin-Coupez 1999] puis repris par [Aliaga 2000] pour la trempe d'acier, au cas du procédé de forgeage en rajoutant principalement la prise en compte des transferts thermiques au niveau des faces en contact entre la pièce et les outils et la déformation de la pièce par l'estimation du terme source, tous deux concernés par la résolution couplée thermomécanique. Puis, nous améliorerons le schéma TGD en introduisant une formulation spatiale plus précise (inspirée des travaux de [Batkam-Coupez 2001] avec l'élément fini plus local P_0^+) et une formulation temporelle plus rapide (avec la possibilité de choisir de grands pas de temps avec le schéma d'Euler implicite), que l'on nommera le modèle Gdimp. Le TGD sera ensuite comparé à cette nouvelle formulation implicite en termes de précision et de temps de calculs.
- **Le troisième chapitre** (p 115) évoquera toute l'élaboration ainsi que l'ensemble des validations (sur des cas analytiques purement thermiques) de notre formulation, la formulation Mixte continue implicite. Pour résoudre ce type de problème thermique instationnaire, cette formulation sera basée sur l'élément fini mixte linéaire tétraédral P_1/P_1 et sur un schéma temporel à caractère implicite.
- Enfin, **le quatrième chapitre** (p 175) prendra en compte le couplage thermomécanique, se produisant au cours des diverses étapes de la mise en forme des matériaux par le procédé de forgeage à chaud. La nature du couplage sera alors définie après avoir détaillé les équations régissant le problème mécanique relatif au forgeage et les méthodes de résolution. Pour terminer ce chapitre, nous présenterons des résultats de validations de la méthode mixte continue sur des cas simples de forgeage ainsi que des applications industrielles, conformément aux objectifs du Ge6.

Au cours des trois derniers chapitres, des cas de validations et des applications industrielles plus ou moins académiques seront appliqués sur les trois modèles. Pour achever ce travail, une synthèse sera effectuée en vue de déterminer la méthode la plus précise qu'il faudra utiliser pour chaque type de problèmes que l'on rencontrera au cours de la mise en forme des métaux.

Chapitre 1

Présentation du modèle thermique instationnaire

Ce premier chapitre est entièrement dédié à la modélisation, puis à la résolution du problème thermique instationnaire, ayant pour seule inconnue la température.

Pour ce faire, nous nous intéressons à l'ensemble des équations et conditions nécessaires à la modélisation "générale et globale" du problème thermique instationnaire, et plus particulièrement à la version adaptée pour simuler le procédé de forgeage à chaud. Une description lagrangienne du modèle thermique instationnaire sera alors considérée pour l'utilisation du code éléments finis 3D Forge 3[®].

Dans une seconde partie, ce problème est résolu de manière classique par l'approche Galerkin standard. Cependant cette dernière va générer des instabilités, partiellement estompées et lissées lors de l'association avec la thermique asynchrone. C'est cette technique de résolution qui est actuellement implantée dans la version monodomaine de Forge 3[®].

Enfin, une dernière partie, plus bibliographique, est consacrée aux diverses techniques de résolutions des problèmes de convection/diffusion. Après avoir pris connaissance dans la littérature de ces méthodes, qui ont bien sûr, chacune, des particularités bien spécifiques et quelques limitations, nous en présentons les principales : les méthodes stabilisées, la méthode de Taylor Galerkin, la méthode de Galerkin Discontinu. Toutes ces méthodes vont se révéler plus efficaces que la méthode Galerkin standard.

1.1 Modélisation lagrangienne du problème thermique

Dans cette première partie, nous nous intéressons à la modélisation du problème thermique instationnaire, sous la forme lagrangienne. Le problème thermique que nous souhaitons résoudre est gouverné par l'équation de la chaleur munie de la loi de Fourier et d'un certain nombre de conditions aux limites sur les frontières du domaine étudié. Au cours de ce travail, nous verrons, dans le cas du forgeage, que ces frontières peuvent être soit des surfaces libres, soit des surfaces en contact avec un autre domaine.

1.1.1 Equations régissant le problème thermique instationnaire

Décrivons le problème thermique instationnaire tel qu'il a déjà été présenté par [Soyris 1990] et plus récemment par [Aliaga 2000] au cours de leur travail de thèse. Partant du premier principe de la thermodynamique [Suquet 1982], l'équation de la chaleur pourra être établie sous certaines hypothèses.

1.1.1.1 Equation de la chaleur

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , (d étant la dimension, dans la pratique $d = 2$ ou 3) de frontière Γ suffisamment régulière. Cette frontière se compose de quatre parties ouvertes disjointes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 telles que $\Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} \cup \overline{\Gamma_3} \cup \overline{\Gamma_4}$.

Le premier principe de la thermodynamique [Soyris 1990] permet d'exprimer l'équation de conservation de l'énergie (1.1), traduisant le fait que l'énergie interne spécifique est due à la puissance dissipée par les efforts intérieurs (déformations) et à un apport de chaleur :

$$\rho \frac{de}{dt} = -\operatorname{div} \vec{q} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + r \quad (1.1)$$

avec e l'énergie interne spécifique, ρ la masse volumique, \vec{q} le vecteur flux de chaleur, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur de contraintes de Cauchy, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ le tenseur taux de déformation, r le terme volumique de création de chaleur et $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ la dérivée particulaire.

Afin de pouvoir définir l'équation de l'énergie (1.1) en fonction de la température, plusieurs hypothèses simplificatrices sont faites :

- Le matériau est à liaisons parfaites et on néglige toute transformation chimique ou physique de la matière : l'énergie interne est alors supposée dépendre de la température absolue T ($e = e(T)$) par l'intermédiaire de la capacité calorifique spécifique c du matériau :

$$\frac{de}{dt} = c \frac{dT}{dt} \quad (1.2)$$

- En négligeant le terme volumique du taux de chaleur reçue ($r \simeq 0$), la création d'énergie est définie par :

$$\dot{w} = f_p \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\vec{v}) \quad \text{et} \quad r = 0 \quad (1.3)$$

où f_p représente la fraction de puissance de déformations transformées en chaleur, comprise entre 0,9 et 1. La puissance dissipée \dot{w} est connue puisque nous considérons le problème thermique seul. Il n'en sera plus de même lors de la résolution couplée thermomécanique (cf chapitre 4) dans la mesure où \dot{w} est fonction du champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et de la vitesse \vec{v} . Le terme \dot{w} est donc en partie à l'origine du couplage entre le problème thermique et mécanique (cf p.189).

En combinant (1.2) et (1.3), l'équation locale (1.1) s'écrit alors sous la forme dite équation de la chaleur :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \rho c \frac{dT}{dt} & = & \rho c \frac{\partial T}{\partial t} & + & \rho c \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T & = & -\operatorname{div} \vec{q} & + & \dot{w} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{variation d'énergie} & & \text{variation d'énergie} & & \text{convection} & & \text{diffusion} & & \text{création} \\
 \text{du point matériel} & & \text{au point fixe} & & \text{d'énergie} & & \text{d'énergie} & & \text{d'énergie}
 \end{array} \quad (1.4)$$

Cette équation (1.4) considère le transport (la convection), la diffusion et la dissipation de la chaleur.

- Enfin, une représentation lagrangienne étant utilisée (code Forge3[®]) pour exprimer la dérivée particulaire $\left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\right)$, l'équation de la chaleur se met alors sous la forme réduite suivante :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = \dot{w}} \quad (1.5)$$

1.1.1.2 Loi de Fourier

Dans le cas d'un milieu continu au repos, on peut établir l'inégalité ci-dessous :

$$\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T \leq 0 \quad (1.6)$$

Par conséquent, la chaleur ne peut se déplacer naturellement que dans le sens opposé à celui de $\vec{\nabla} T$, autrement dit déplacement par diffusion d'un point à haute température vers un point à basse température [Duvaut 1998].

La loi de Fourier 1.7 qui préconise une relation linéaire entre \vec{q} et $\vec{\nabla} T$ est donc bien en conformité avec (1.6) :

$$\vec{q} = - \bar{\mathbf{K}} \vec{\nabla} T \quad (1.7)$$

$\bar{\mathbf{K}}$ représente le tenseur du second ordre des conductivités thermiques. Si, de plus, le matériau est considéré comme isotrope, alors $\bar{\mathbf{K}} = k \bar{\mathbf{I}}$, et le matériau est caractérisé par le scalaire k , appelé la conductivité thermique.

Nous faisons alors une dernière hypothèse sur le matériau : nous supposons que le matériau suit la loi de conduction isotrope de Fourier selon laquelle le flux de chaleur est proportionnel au gradient thermique :

$$\boxed{\vec{q} = - k \vec{\nabla} T} \quad (1.8)$$

Ainsi, en injectant la loi de Fourier (1.8) dans le terme de diffusion $\operatorname{div} \vec{q}$ de l'équation de la chaleur (1.5), ce dernier se met sous la forme :

$$\operatorname{div} \vec{q} = - \operatorname{div}(k \vec{\nabla} T) \quad (1.9)$$

Finalement, en remplaçant cette nouvelle expression du terme de diffusion (1.9) dans l'équation de la chaleur réduite (1.5), nous obtenons l'équation suivante :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k \vec{\nabla} T) = \dot{w}} \quad (1.10)$$

C'est sous cette forme lagrangienne (1.10) que l'équation de la chaleur est résolue dans le code éléments finis de Forge3[®] et c'est également sous cette forme que nous la résoudrons dans la suite de ce chapitre (section 1.2).

1.1.2 Conditions initiales et conditions aux limites spatio-temporelles

L'équation générale de la chaleur (1.10) est une équation aux dérivées partielles du second ordre en espace et du premier ordre en temps. La résolution de cette équation permet de connaître à chaque instant la température en tout point du matériau. Elle suppose toutefois que la répartition initiale de température ainsi que les conditions aux limites (lois de variation de la température ou de ses dérivées) sur les frontières du domaine étudié soient définies afin que le problème thermique soit correctement posé (et admette une solution unique).

1.1.2.1 Conditions initiales

La carte de température à l'instant initial est connue et se met sous la forme (1.11). Le champ de température peut être homogène ou déterminé au préalable par un calcul ou des mesures :

$$T(x,0) = T_0 \quad \forall x \in \Omega \quad (1.11)$$

1.1.2.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites géométriques résultent des différents phénomènes physiques de transfert de chaleur. S'appliquant sur toute ou une partie de la surface extérieure Γ du domaine Ω étudié (de normale sortante \vec{n}), ces conditions aux limites sont de plusieurs types [Agassant et al. 1996, Incropera-DeWitt 2001]. Nous nous contentons ici de présenter les plus fréquentes, traduisant le lien entre le milieu étudié (le matériau) et le milieu extérieur.

a) Condition de Dirichlet : température imposée

Correspondant au contact avec un corps parfaitement régulé thermiquement, cette condition se met sous la forme :

$$\boxed{T = T_{imp} \quad \text{sur } \Gamma_1} \quad (1.12)$$

où T_{imp} , fonction réelle, représente une température imposée sur le bord Γ_1 .

b) Condition de Neumann : flux imposé

Généralement cette condition s'assimile à une paroi solide qui a une capacité d'évacuation (ou d'apport) de calories données. C'est le flux de chaleur qui est alors déterminé à l'interface. Cette condition, représentant par exemple le contact avec un corps qui fournit un flux constant, s'écrit de la manière suivante :

$$\boxed{\vec{q} \cdot \vec{n} = -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \phi_{imp} \quad \text{sur } \Gamma_2} \quad (1.13)$$

où ϕ_{imp} , fonction réelle, représente pour le problème thermique un flux de chaleur imposé à travers la frontière Γ_2 .

Remarque 1.1 Si le flux est nul ($\phi_{imp} = 0$), on parle alors de condition adiabatique; en d'autres termes, la paroi Γ_2 est isolée.

Remarque 1.2 Le flux négatif ($\phi_{imp} < 0$) suggère un apport d'énergie à la paroi contrairement au flux positif ($\phi_{imp} > 0$) qui induit une perte d'énergie à la paroi.

c) Conduction : échange thermique entre le matériau et un outil

Elle se caractérise par un transfert thermique entre deux solides en contact; ce transfert se produisant des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides. Si au niveau de Γ_3 , le matériau considéré est en contact avec un corps solide (outil) de température constante T_{out} , le transfert répond à la loi de Fourier qui s'écrit :

$$\boxed{\vec{q} \cdot \vec{n} = -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h_{cd}(T - T_{out}) \quad \text{sur } \Gamma_3} \quad (1.14)$$

où h_{cd} est le coefficient de transfert thermique de conduction entre les deux matériaux.

d) Convection/Rayonnement : échange thermique entre le matériau et l'air

Un phénomène de convection se produit quand un solide (ou fluide très visqueux) est en contact avec un fluide (gaz ou liquide fluide). Autrement dit, ces transferts thermiques ont lieu soit entre un solide et un liquide, soit entre un solide et l'air, soit entre un liquide et l'air. C'est donc le cas d'un matériau en contact avec un fluide dont les particules sont libres de se déplacer.

La loi couramment admise est la même que pour la conduction : c'est une loi répondant à la loi de Fourier :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h_{cv}(T - T_f) \quad \text{sur } \Gamma_4 \quad (1.15)$$

où h_{cv} est le coefficient de transfert thermique de convection entre le matériau et le fluide et T_f la température moyenne du fluide, supposée constante.

Le rayonnement, quant à lui, est le dernier mode de transfert de chaleur : *"tout corps chaud émet de l'énergie dans toutes les directions"*. Etablies par Stefan et Boltzmann, les lois de rayonnement permettent d'exprimer le flux de rayonnement échangé entre la surface Γ_4 et le milieu qui entoure Γ_4 . Nous choisissons une approximation de l'une de ces lois qui se met sous la forme très simplifiée :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = \epsilon_r \sigma_r (T^4 - T_{ext}^4) \quad \text{sur } \Gamma_4 \quad (1.16)$$

où T_{ext} est la température extérieure, ϵ_r l'émissivité du corps considéré (toujours comprise entre 0 et 1) et σ_r la constante de Stefan fixée à $\sigma_r = 5.66961 \cdot 10^{-8} \text{ kg.s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$.

En somme, lorsque des transferts thermiques se produisent entre le matériau et l'air à travers la surface Γ_4 , ces transferts seront à la fois modélisés par un phénomène de convection et de rayonnement émis par le domaine. Ces deux modes de transfert peuvent alors se regrouper en une seule condition. Nous optons pour une écriture simplifiée, type loi de Fourier, avec :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{q} \cdot \vec{n} = -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h(T - T_{ext}) \\ h = h_{cv} + h_r \\ h_r = \epsilon_r \sigma_r (T + T_{ext})(T^2 + T_{ext}^2) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_4} \quad (1.17)$$

où h , h_{cv} et h_r sont respectivement les coefficients de transfert thermique global, de convection et de rayonnement, T_{ext} la température extérieure (supposée constante), ϵ_r l'émissivité du corps considéré, σ_r la constante de Stefan et T la température du matériau.

1.1.2.3 Cinématique du problème thermique

Un problème général de thermique peut très bien avoir des conditions aux limites mixtes. La figure 1.1 représente les différents types de conditions aux limites rencontrées :

- Le corps Ω est soumis à une température T_{imp} constante sur Γ_1 , à une densité de source de chaleur Φ_{imp} sur Γ_2 .
- Des transferts thermiques ont également lieu entre le corps et un outil à travers Γ_3 (conduction) et entre le corps et l'air à travers Γ_4 (convection/rayonnement).

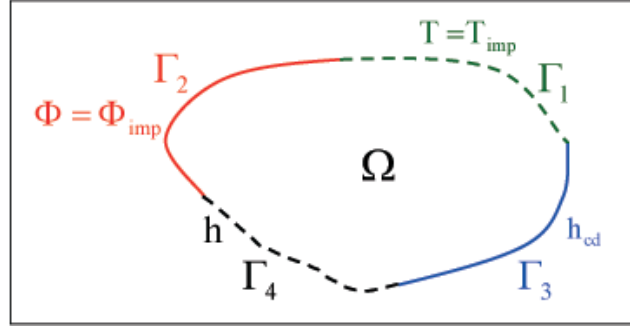


FIG. 1.1 – Conditions aux limites mixtes du problème thermique.

1.1.3 Formulation classique : une inconnue la température

Résumons, ci-dessous, les équations régissant le problème thermique instationnaire avec la température T pour seule inconnue :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(k \overrightarrow{\nabla T}) = \dot{w} & \text{dans } \Omega \times]0, t[\quad \text{équation de la chaleur} \\ T(x, 0) = T_0 \quad \forall x \in \Omega & \text{condition initiale} \\ T = T_{imp} & \text{sur } \Gamma_1 \times]0, t[\quad \text{condition de Dirichlet} \\ -k \overrightarrow{\nabla T} \cdot \vec{n} = \phi_{imp} & \text{sur } \Gamma_2 \times]0, t[\quad \text{condition de Neumann} \\ -k \overrightarrow{\nabla T} \cdot \vec{n} = h_{cd}(T - T_{out}) & \text{sur } \Gamma_3 \times]0, t[\quad \text{condition de conduction} \\ \left\{ \begin{array}{l} -k \overrightarrow{\nabla T} \cdot \vec{n} = h(T - T_{ext}) \\ h = h_{cv} + h_r \\ h_r = \epsilon_r \sigma_r (T + T_{ext})(T^2 + T_{ext}^2) \end{array} \right. & \text{sur } \Gamma_4 \times]0, t[\quad \text{condition de conv/rayt} \end{array} \right. \quad (1.18)$$

Le problème (1.18) représente la formulation forte du problème thermique instationnaire, constituée de l'équation de la chaleur combinée à la loi de Fourier (1.10) ainsi que des conditions initiales (1.11) et aux limites (1.12)-(1.14) et (1.17).

Le problème thermique étant décrit, on se propose de le résoudre dans la partie suivante à l'aide de différentes méthodes numériques ayant chacune des particularités bien spécifiques. Avant cela, le problème thermique spécifique au procédé de forgeage à chaud est formulé.

1.1.4 Equations de la thermique adaptées à la simulation du procédé de forgeage

Dans le cas du forgeage à chaud, certaines grandeurs spécifiques au procédé sont à préciser pour résoudre l'équation de la chaleur (1.10). Tout d'abord, il faut exprimer le terme source \dot{w} lié à la loi de comportement (cf chapitre 4). Ensuite, il faut définir les conditions aux limites thermiques qui sont dans ce cas de deux types.

1.1.4.1 Sur les faces en contact avec les outils

Il y a simultanément une condition de contact statique et une condition de contact dynamique sur la face en contact Γ_c .

- La condition de contact statique est responsable d'un flux de conduction correspondant au contact de deux corps immobiles de température différente.
- La condition dynamique imposée par le frottement correspond au contact de deux corps en mouvement relatif.

Autrement dit, pour caractériser les conditions aux limites sur les faces en contact, il faut superposer ces deux conditions pour établir le phénomène résultant :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h_{cd}(T - T_{out}) - \frac{b_m}{b_m + b_{out}} \alpha K \|\Delta \nu_t\|^{p+1} \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (1.19)$$

où h_{cd} est le coefficient thermique de conduction, $b_m = \sqrt{k_m \rho_m c_m}$ l'effusivité du matériau et b_{out} l'effusivité de l'outil, K la consistance du matériau, $\Delta \nu_t$ la vitesse de glissement à l'interface et α caractérise le frottement. Cette condition (1.47) interviendra lors du couplage avec la résolution du problème mécanique (cf chapitre 4) comme la formulation du terme source \dot{w} .

1.1.4.2 Sur les faces libres

Il y a un flux de convection et un flux de rayonnement représentés par la condition (1.17) sur la surface Γ_l .

1.1.4.3 Récapitulatif

Le problème (1.20) représente la formulation forte du problème thermique instationnaire associée au procédé de forgeage à chaud : il est constitué de l'équation de la chaleur combinée à la loi de Fourier (1.10) et à loi de comportement pour le terme source ainsi que des conditions initiales (1.11) et aux limites (conductives (1.19) pour les surfaces en contact avec les outils et convectives/radiatives (1.17) pour les faces libres).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(k \vec{\nabla} T) = \dot{w} & \text{dans } \Omega \times]0, t[\\ T(x, 0) = T_0 & \forall x \in \Omega \\ -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h_{cd}(T - T_{out}) - \frac{b_m}{b_m + b_{out}} \alpha K \|\Delta \nu_t\|^{p+1} & \text{sur } \Gamma_c \times]0, t[\\ \left\{ \begin{array}{l} -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h(T - T_{ext}) \\ h = h_{cv} + h_r \\ h_r = \epsilon_r \sigma_r (T + T_{ext})(T^2 + T_{ext}^2) \end{array} \right. & \text{sur } \Gamma_l \times]0, t[\end{array} \right. \quad (1.20)$$

1.2 Résolution numérique du problème thermique

Dans cette partie, le problème thermique instationnaire (1.18) est résolu de manière classique à l'aide de la méthode des éléments finis [Zienkiewicz-Taylor 1989], [Ern-Germond 2000], [Thomée 1997]. Suivra ensuite une discussion concernant les limitations de cette méthode de résolution et des techniques possibles d'améliorations.

1.2.1 Résolution classique : la méthode Galerkin standard

On rappelle brièvement l'approche Galerkin standard utilisée pour résoudre le problème thermique à une seule inconnue la température.

1.2.1.1 Formulation variationnelle

Afin de formuler dans un sens faible le problème thermique instationnaire (1.18), nous considérons l'espace V des fonctions tests φ s'annulant sur Γ_1 (condition de Dirichlet). En multipliant (1.10) par φ et en intégrant sur le domaine Ω , il vient :

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \varphi \, d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div}(k \vec{\nabla} T) \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \dot{w} \varphi \, d\Omega \quad \forall \varphi \in V \quad (1.21)$$

En effectuant une intégration par parties sur la deuxième intégrale du terme de gauche de (1.21), on obtient :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(k \vec{\nabla} T) \varphi \, d\Omega = \int_{\Gamma} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \varphi \, d\Gamma - \int_{\Omega} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} \varphi \, d\Omega \quad \forall \varphi \in V \quad (1.22)$$

D'autre part, les diverses conditions aux limites appliquées sur des parties de la frontière Γ permettent de décomposer l'intégrale surfacique en trois sous-intégrales et d'en déduire :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \varphi \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_2} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \varphi \, d\Gamma + \int_{\Gamma_3} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \varphi \, d\Gamma + \int_{\Gamma_4} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \varphi \, d\Gamma \\ &= - \int_{\Gamma_2} \phi_{imp} \varphi \, d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_3} h_{cd} (T - T_{out}) \varphi \, d\Gamma_3 - \int_{\Gamma_4} h (T - T_{ext}) \varphi \, d\Gamma_4 \quad \forall \varphi \in V \end{aligned} \quad (1.23)$$

Finalement, la formulation faible de l'équation de la chaleur s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} \varphi \, d\Omega + \int_{\Gamma_3} h_{cd} T \varphi \, d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} h T \varphi \, d\Gamma_4 \\ = \int_{\Omega} \dot{w} \varphi \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \phi_{imp} \varphi \, d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} h_{cd} T_{out} \varphi \, d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} h T_{ext} \varphi \, d\Gamma_4 \quad \forall \varphi \in V \end{aligned} \quad (1.24)$$

Introduisons alors des espaces fonctionnels adéquats tels que :

$$\begin{cases} L^2(\Omega) &= \left\{ w, \int_{\Omega} w^2 \, d\Omega < \infty \right\} \\ H^1(\Omega) &= \mathcal{T} = \left\{ w \in L^2(\Omega), \nabla w \in [L^2(\Omega)]^d \right\} \end{cases}$$

On rappelle que l'espace $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_0)$ est muni de son produit scalaire $(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} u v \, d\Omega$ et que $L^2(0, t; \mathcal{T})$ est l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $]0, t[$ à valeurs dans \mathcal{T} .

Ainsi, en posant :

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} k \overrightarrow{\nabla u} \cdot \overrightarrow{\nabla v} d\Omega + \int_{\Gamma_3} h_{cd} u v d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} h u v d\Gamma_4 \\ l(v) = \int_{\Omega} \dot{w} v d\Omega - \int_{\Gamma_2} \phi_{imp} v d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} h_{cd} u_{out} v d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} h u_{ext} v d\Gamma_4 \end{cases} \quad (1.25)$$

la formulation faible associée au problème thermique (1.18) s'écrit :

Trouver $T \in L^2(0, t; T)$ tel que :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}, \varphi \right)_{\Omega} + a(T, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (1.26)$$

Remarque 1.3 En considérant la formulation eulérienne de l'équation de la chaleur, le terme volumique de la dérivée temporelle de la température se décompose en deux termes :

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{dT}{dt} \varphi d\Omega = \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \rho c \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla T} \varphi d\Omega \quad \forall \varphi \in V \quad (1.27)$$

En réeffectuant une intégration par parties sur le terme volumique de la diffusion de (1.27), on obtient pour $\forall \varphi \in V$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \rho c \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla T} \varphi d\Omega + \int_{\Omega} k \overrightarrow{\nabla T} \cdot \overrightarrow{\nabla \varphi} d\Omega + \int_{\Gamma_3} h_{cd} T \varphi d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} h T \varphi d\Gamma_4 \\ &= \int_{\Omega} \dot{w} \varphi d\Omega - \int_{\Gamma_2} \phi_{imp} \varphi d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} h_{cd} T_{out} \varphi d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} h T_{ext} \varphi d\Gamma_4 \end{aligned}$$

En considérant la notation :

$$\tilde{a}(u, w) = \int_{\Omega} \rho c \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla u} w d\Omega + \int_{\Omega} k \overrightarrow{\nabla u} \cdot \overrightarrow{\nabla w} d\Omega + \int_{\Gamma_3} h_{cd} u w d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} h u w d\Gamma_4$$

la formulation faible du problème thermique en représentation eulérienne s'écrit :

Trouver $T \in L^2(0, t; T)$ tel que :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}, \varphi \right)_{\Omega} + \tilde{a}(T, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (1.28)$$

1.2.1.2 Formulation variationnelle discrète

La méthode de Galerkin standard, introduite par [Zienkiewicz-Taylor 1989], consiste à approcher l'espace \mathcal{T} par l'espace de dimension finie \mathcal{T}_h : \mathcal{T}_h est l'espace des fonctions d'interpolation qui sont des polynômes de degré n par élément; n représentant le degré d'interpolation choisi.

La formulation variationnelle discrète du problème thermique (1.18) s'écrit alors :

Trouver $T_h \in L^2(0, t; \mathcal{T}_h)$ tel que :

$$\left(\frac{\partial T_h}{\partial t}, \varphi \right)_{\Omega} + a(T_h, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_h. \quad (1.29)$$

Remarque 1.4 De la même manière, on obtient la formulation variationnelle discrète du problème thermique dans sa représentation eulérienne :

Trouver $T_h \in L^2(0,t; \mathcal{T}_h)$ tel que :

$$\left(\frac{\partial T_h}{\partial t}, \varphi \right)_{\Omega} + \tilde{a}(T_h, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_h. \quad (1.30)$$

avec \tilde{a} préalablement définie dans la remarque 1.3.

1.2.1.3 Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis

Pour trouver le champ de température inconnu solution de (1.29), on remplace le domaine Ω par un ensemble de N_{el} éléments Ω_e (des tétraèdres dans le cas tridimensionnel) construits à partir des points du domaine, les noeuds. Ceci permet de remplacer les intégrales des équations (1.25) par une sommation sur les éléments :

$$\int_{\Omega} () d\Omega = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} () d\Omega_e \text{ où } () \text{ représente la fonction à intégrer.}$$

De même, $\int_{\Gamma} () d\Gamma = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Gamma_e} () d\Gamma_e$ où la partie de la frontière Γ_e correspond à l'ensemble des faces extérieures appartenant à l'élément Ω_e , c'est à dire $\Gamma_e = \sum_{f_{ext} \in \Omega_e} f_{ext}$.

La formulation par éléments finis permet d'exprimer la température T à l'instant t en un point quelconque (x) de la pièce sur Ω par rapport à des fonctions d'interpolation N_i associée au noeud i et de valeurs connues aux noeuds du domaine discrétisé Ω_h (température T_i au noeud i). La température est donc approchée par :

$$T(x,t) = \sum_{i=1}^{nbnoe} N_i(x) T_i(t) \quad (1.31)$$

où $nbnoe$ correspond au nombre de noeuds du domaine maillé Ω_h et N_i sont les fonctions de base valant 1 au noeud i et nulle aux autres noeuds.

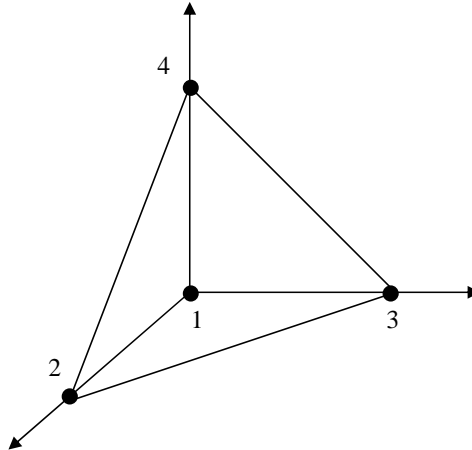


FIG. 1.2 – Élément tétraédrique à 4 noeuds.

Dans le cas d'une interpolation linéaire sur l'élément tétraédrique Ω_e , les fonctions N_i sont des polynômes de degré 1 ($N_i \in P_1$) avec 4 inconnues T_i par élément Ω_e (cf figure 1.2). Le problème discrétisé (1.29) se met alors sous la forme matricielle suivante :

$$\boxed{\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{Q}} \quad (1.32)$$

* \mathbf{T} représente le vecteur solution, regroupant tous les noeuds à l'exception de ceux où T_i est imposée sur le bord Γ_1 .

* \mathbf{C} est la matrice de capacité, symétrique définie positive, définie par :

$$C_{ij} = \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega_e} \rho c N_i N_j d\Omega_e$$

* \mathbf{K} est la matrice de conductivité définie positive telle que :

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{Nel} \left(\int_{\Omega_e} k \overrightarrow{\nabla N_i} \cdot \overrightarrow{\nabla N_j} d\Omega_e + \int_{\Gamma_{3e}} h_{cd} N_i N_j d\Gamma_{3e} + \int_{\Gamma_{4e}} h N_i N_j d\Gamma_{4e} \right)$$

* \mathbf{Q} est le vecteur chargement :

$$Q_i = \sum_{e=1}^{Nel} \left(\int_{\Omega_e} \dot{w} N_i d\Omega_e + \int_{\Gamma_{2e}} \phi_{imp} N_i d\Gamma_{2e} + \int_{\Gamma_{3e}} h_{cd} T_{out} N_i d\Gamma_{3e} + \int_{\Gamma_{4e}} h T_{ext} N_i d\Gamma_{4e} \right)$$

L'application de la méthode des éléments finis nous amène donc à résoudre le système (1.32) formé de $(nbnoe)$ équations à $(nbnoe)$ inconnues. Nous remarquons que cette équation différentielle du premier ordre est non linéaire avec les matrices \mathbf{C} , \mathbf{K} (essentiellement au niveau des termes surfaciques) et le vecteur \mathbf{Q} thermo-dépendants.

Pour approcher la solution de ce système d'équations différentielles (1.32), il faut donc mettre en oeuvre un schéma numérique d'intégration en temps, nécessaire pour exprimer les dérivées temporelles.

1.2.1.4 Intégration temporelle

Les possibilités des schémas d'approximations temporelles sont nombreuses. Généralement, c'est un schéma de discrétisation temporelle de type différences finies qui est associé à l'approximation spatiale (1.32). Un grand nombre de formulations se distingue dans la littérature selon le nombre de pas de temps voulu. On retrouve par exemple :

a) Les schémas à deux pas de temps, encore appelés θ -schémas où $\theta \in [0,1]$ est un paramètre :

$$\theta \frac{\partial \mathbf{T}_{n+1}}{\partial t} + (1 - \theta) \frac{\partial \mathbf{T}_n}{\partial t} = \frac{\mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n}{\Delta t} \quad (1.33)$$

Cela consiste à remplacer l'équation différentielle (1.32) par le schéma aux différences finies :

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n}{\Delta t} = (1 - \theta) [\mathbf{Q}_n - \mathbf{K} \mathbf{T}_n] + \theta [\mathbf{Q}_{n+1} - \mathbf{K} \mathbf{T}_{n+1}] \quad (1.34)$$

Connaissant \mathbf{T}_n , l'approximation de $\mathbf{T}(t_n)$, l'équation permet ainsi de calculer \mathbf{T}_{n+1} (approximation de $\mathbf{T}(t_{n+1})$). De manière schématique avec une fonction F , on a donc :

$$\boxed{\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}_n + \Delta t \left[(1 - \theta) F(\mathbf{T}_n) + \theta F(\mathbf{T}_{n+1}) \right]} \quad (1.35)$$

Enumérons les schémas les plus connus [Raviart-Thomas 1998] :

- le schéma d'Euler explicite ($\theta = 0$) : la résolution de l'équation est immédiate puisqu'elle fournit explicitement \mathbf{T}_{n+1} en fonction de \mathbf{T}_n :

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n}{\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{T}_n = \mathbf{Q}_n \Leftrightarrow \mathbf{C} \mathbf{T}_{n+1} = [\mathbf{C} - \Delta t \mathbf{K}] \mathbf{T}_n + \Delta t \mathbf{Q}_n \quad (1.36)$$

Lorsque $\theta > 0$, \mathbf{T}_{n+1} est obtenue implicitement comme solution d'une équation non linéaire.

- le schéma d'Euler implicite ($\theta = 1$) :

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n}{\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{Q}_{n+1} \Leftrightarrow [\mathbf{C} + \Delta t \mathbf{K}] \mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{C} \mathbf{T}_n + \Delta t \mathbf{Q}_{n+1} \quad (1.37)$$

- ou encore le schéma de Crank-Nicholson avec $\theta = \frac{1}{2}$.

Remarque 1.5 *Consistance et stabilité [Raviart-Thomas 1998].*

Tous ces schémas sont consistants et d'ordre 1, excepté pour le schéma de Crank-Nicholson ($\theta = \frac{1}{2}$) qui est d'ordre 2. Pour $\theta \geq \frac{1}{2}$, ces schémas sont inconditionnellement stables. Par contre, pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, ces schémas ne sont stables que moyennant une restriction sur les pas de temps dite condition de stabilité.

b) Les schémas à trois pas de temps : on retrouve notamment les schémas de Richarson, de Dupont ou de Lees, décrits dans le paragraphe suivant.

c) Les schémas partant d'une écriture simultanée des dérivées spatiales et temporelles (jusqu'à un ordre élevé). Cela consiste à enrichir la dérivée temporelle par un développement limité dans lequel on exprime les dérivées temporelles d'ordre k en fonction des dérivées spatiales. Le plus connu de ces schémas est le schéma de Taylor Galerkin [Donea 1984], détaillé dans le paragraphe 1.3.3 et dans le chapitre 2 (§ 2.2.1).

1.2.1.5 Schéma d'intégration temporelle choisi [Soyris 1990]

Dans ce paragraphe, nous présentons le schéma d'intégration temporelle actuellement implanté dans le solveur thermique du code éléments finis Forge3[®].

La résolution du système différentiel (1.32) va se faire en considérant un schéma aux différences finies à trois pas de temps du second ordre, beaucoup plus général que ceux décrits ci-dessus. Une présentation succincte de ce schéma est abordée ici; le lecteur intéressé pourra se référer à la thèse de [Soyris 1990] pour de plus amples détails.

Le système (1.32) est **discretisé** à l'instant t^* :

$$t^* = \alpha_1 t_{n-1} + \alpha_2 t_n + \alpha_3 t_{n+1} \quad (1.38)$$

où t_{n-1} , t_n et t_{n+1} sont trois pas de temps successifs séparés par les durées $\Delta t_1 = t_n - t_{n-1}$ et $\Delta t_2 = t_{n+1} - t_n$. Les coefficients α_i sont choisis arbitrairement de manière à avoir la condition $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

La température d'un point \mathbf{T}^* va s'écrire :

$$\mathbf{T}^* = \alpha_1 \mathbf{T}_{n-1} + \alpha_2 \mathbf{T}_n + \alpha_3 \mathbf{T}_{n+1} \quad (1.39)$$

La dérivée de \mathbf{T} est également exprimée à l'instant t^* avec un schéma à trois niveaux :

$$\frac{\partial \mathbf{T}^*}{\partial t} = \frac{\beta_1 \mathbf{T}_{n-1} + \beta_2 \mathbf{T}_n}{\Delta t_1} + \frac{\gamma_1 \mathbf{T}_n + \gamma_2 \mathbf{T}_{n+1}}{\Delta t_2} \quad (1.40)$$

Pour que $\frac{\partial \mathbf{T}^*}{\partial t}$ soit réellement l'expression d'une dérivée temporelle, il faut une relation entre les coefficients β et γ :

$$\gamma_1 = -\gamma_2 \quad \text{et} \quad \beta_1 = -\beta_2 = \gamma_2 - 1. \quad (1.41)$$

Ce qui nous conduit à réécrire la dérivée :

$$\frac{\partial \mathbf{T}^*}{\partial t} = (1 - \gamma_2) \frac{\mathbf{T}_n - \mathbf{T}_{n-1}}{\Delta t_1} + \gamma_2 \frac{\mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n}{\Delta t_2} \quad (1.42)$$

Nécessairement l'existence d'un schéma stable et consistant à l'ordre deux impose des relations entre les coefficients α , β et γ :

– Le schéma est inconditionnellement stable si :

$$\gamma_2 \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_1 > \frac{1}{2} (1 - \gamma_2) \quad (1.43)$$

– et consistant pour :

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1 - \alpha_1 + \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} - \frac{\gamma_2}{2} \left(1 + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}\right) \\ \alpha_3 = \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} + \frac{\gamma_2}{2} \left(1 + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}\right) \end{cases} \quad (1.44)$$

Remarque 1.6 Comme les matrices \mathbf{C} , \mathbf{K} et les vecteurs \mathbf{Q} sont thermo-dépendants, une relation analogue doit être également introduite :

$$\mathbf{C}^* = \alpha_1 \mathbf{C}_{n-1} + \alpha_2 \mathbf{C}_n + \alpha_3 \mathbf{C}_{n+1}. \quad (1.45)$$

Finalement, l'équation à résoudre (1.32) se ramène à l'écriture du système différencié en temps (1.47) suivant :

$$\mathbf{C}^* \frac{\partial \mathbf{T}^*}{\partial t} + \mathbf{K}^* \mathbf{T}^* = \mathbf{Q}^* \quad (1.46)$$

$$\mathbf{C}^* \left[(1 - \gamma_2) \frac{\mathbf{T}_n - \mathbf{T}_{n-1}}{\Delta t_1} + \gamma_2 \frac{\mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n}{\Delta t_2} \right] + \mathbf{K}^* \left(\alpha_1 \mathbf{T}_{n-1} + \alpha_2 \mathbf{T}_n + \alpha_3 \mathbf{T}_{n+1} \right) = \mathbf{Q}^* \quad \text{cf annexe A}$$

$$\left(\mathbf{C}^* \frac{\gamma_2}{\alpha_3 \Delta t_2} + \mathbf{K}^* \right) \mathbf{T}^* = \mathbf{Q}^* + \mathbf{C}^* \left[\left(\frac{\alpha_1 \gamma_2}{\alpha_3 \Delta t_2} - \frac{\beta_1}{\Delta t_1} \right) \mathbf{T}_{n-1} + \left(\frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_3 \Delta t_2} - \frac{\beta_2}{\Delta t_1} - \frac{\gamma_1}{\Delta t_2} \right) \mathbf{T}_n \right] \quad (1.47)$$

Remarque 1.7 Grâce à la formulation générale (1.47), nous pouvons utiliser divers schémas d'intégration numérique, stables et consistants à l'ordre 2. Le tableau 1.1 en dresse un récapitulatif. Nous choisissons le schéma de Dupont Implicite. Notons que l'initialisation se fait à l'aide du schéma de Crank-Nicholson, à un pas de temps.

	α_1	α_2	α_3	γ_2	β_1
Lees	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Dupont-Dupont	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	0
Dupont Implicite	0	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
Crank-Nicholson	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0

TAB. 1.1 – Divers schémas numériques.

1.2.1.6 Résolution numérique du système non linéaire

Le système (1.32) étant non linéaire, il peut être résolu par des méthodes itératives de type Newton-Raphson [Fachinotti 2003] qui sont malheureusement coûteuses. La méthode retenue est la linéarisation des équations par la formule de Zlâmal [Zlâmal 1977].

a) Méthode de Newton-Raphson

Le système différentiel 1.46 devant être résolu au temps $t = t^*$, nous avons avec $\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}_{n+1}$:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{C}^* \left[(1 - \gamma_2) \frac{\mathbf{T}_n - \mathbf{T}_{n-1}}{\Delta t_1} + \gamma_2 \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}_n}{\Delta t_2} \right] + \mathbf{K}^* \mathbf{T}^* - \mathbf{Q}^* = \mathbf{0}, \quad (1.48)$$

La méthode de Newton-Raphson implique la solution itérative de l'équation ci-dessus [Fachinotti 2003]. L'inconnue température \mathbf{T} est calculée à chaque itération k :

$$\mathbf{T}^k = \mathbf{T}^{k-1} + \Delta \mathbf{T} \quad (1.49)$$

$$\text{avec la correction } \Delta \mathbf{T} \text{ telle que : } \Delta \mathbf{T} = - [\mathbf{J}^{k-1}]^{-1} \mathbf{R}^{*k-1} \quad (1.50)$$

\mathbf{J} représente la matrice jacobienne définie par :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\gamma_2}{\Delta t_2} \left[\mathbf{C}^* + \frac{d\mathbf{C}^*}{d\mathbf{T}} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_n) \right] + \alpha_3 \mathbf{K}^* + \frac{d\mathbf{K}^*}{d\mathbf{T}} \mathbf{T}^* \quad (1.51)$$

puisque $\mathbf{T}^* = \alpha_1 \mathbf{T}_{n-1} + \alpha_2 \mathbf{T}_n + \alpha_3 \mathbf{T}_{n+1}$.

Le terme source \mathbf{Q} est supposé indépendant de la température et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{d\mathbf{C}^*}{d\mathbf{T}} \right]_{ijk} = \frac{dC_{ik}^*}{dT_j} = \alpha_3 \frac{dC_{ik}}{dT_j} \\ \left[\frac{d\mathbf{K}^*}{d\mathbf{T}} \right]_{ijk} = \frac{dK_{ik}^*}{dT_j} = \alpha_3 \frac{dK_{ik}}{dT_j} \end{array} \right. \quad (1.52)$$

b) Linéarisation du problème non linéaire : technique de Zlâmal

[Zlâmal 1977] propose d'approcher chaque grandeur A à l'instant t^* de la manière suivante :

$$A^* = \chi_0 A_{n-1} + \chi_1 A_n \quad (1.53)$$

de façon à faire disparaître le terme A_{n+1} à l'instant t_{n+1} . Bien évidemment cette approximation doit rester cohérente avec le schéma temporel adopté, c'est à dire :

$$t^* = \alpha_1 t_{n-1} + \alpha_2 t_n + \alpha_3 t_{n+1} = \chi_0 t_{n-1} + \chi_1 t_n \quad (1.54)$$

Dans le cas d'une consistance à l'ordre 2 définie par (1.42), les coefficients χ_0 et χ_1 de l'approximation de Zlâmal pourront être définis par :

$$\begin{cases} \chi_0 = \frac{1}{2} - \tilde{\gamma}_2 \\ \chi_1 = \frac{1}{2} + \tilde{\gamma}_2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \tilde{\gamma}_2 = \frac{\gamma_2}{2} \left(1 + \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \right) \quad (1.55)$$

On arrive donc à l'expression :

$$A^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma_2}{2} \left(1 + \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \right) \right) A_{n-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma_2}{2} \left(1 + \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \right) \right) A_n \quad (1.56)$$

La linéarisation de Zlâmal est appliquée aux matrices \mathbf{C} , \mathbf{K} et au vecteur \mathbf{Q} du système matriciel (1.32), aboutissant au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{T}^* = \mathbf{B} \\ \mathbf{A} = f(C_{n-1}, C_n, K_{n+1}, K_n, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \alpha_i, \gamma_i) \\ \mathbf{B} = g(C_{n-1}, C_n, Q_{n+1}, Q_n, T_{n+1}, T_n, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \alpha_i, \gamma_i) \end{cases} \quad (1.57)$$

où le vecteur \mathbf{T}^* contient les valeurs nodales inconnues à l'instant t^* .

Le système est résolu par la méthode de gradient conjugué préconditionné par la diagonale. On retrouve ensuite l'expression de \mathbf{T}_{n+1} à l'instant t_{n+1} à partir de :

$$\boxed{\mathbf{T}_{n+1} = \frac{1}{\alpha_3} \left[\mathbf{T}^* - (\alpha_1 \mathbf{T}_{n-1} + \alpha_2 \mathbf{T}_n) \right]} \quad (1.58)$$

1.2.2 Limitations de la méthode de Galerkin

Les méthodes de Galerkin standard rencontrent en général deux types de difficultés selon la nature du problème à résoudre.

1.2.2.1 Problèmes à convection dominante : apparitions d'instabilités

Le traitement numérique des équations de convection/diffusion soulève des difficultés liées à l'opérateur hyperbolique non symétrique de la convection $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$.

On le retrouve dans la formulation variationnelle (1.28), sous la forme non symétrique :

$$\int_{\Omega} \rho c \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \varphi \, d\Omega \quad (1.59)$$

Autrement dit, le théorème d'existence et d'unicité de la solution ne pourra pas s'appliquer dans ce cas [Zienkiewicz-Taylor 1989, Rappaz et al. 1998, Ern-Germond 2000]. Cette propriété de non symétrie soulève donc des difficultés quand on s'intéresse au traitement numérique des problèmes de transport pur ou à convection dominante avec l'apparition de schémas instables.

Remarque 1.8 En réalité, [Brooks-Hughes 1982] montrent que la formulation (1.32) donne lieu à des oscillations numériques et à des solutions peu précises dès que le nombre de Péclet P_e est élevé; le nombre de Péclet étant le rapport des termes de convection aux termes de diffusion dans l'équation générale d'advection (1.60) de champ scalaire inconnu u :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u - \nabla \cdot (a \vec{\nabla} u) = f \\ P_e = \frac{h v}{a} \end{cases} \quad (1.60)$$

où h est une longueur caractéristique (taille de maille par exemple), a la diffusivité thermique, \vec{v} la vitesse et $v = \|\vec{v}\|$.

En choisissant d'opter pour des schémas de différences finies, on peut remédier à ces instabilités : il suffit de *décentrer le terme de convection vers l'amont de l'écoulement*, permettant ainsi d'éviter un raffinement du maillage trop coûteux.

Plusieurs schémas éléments finis reproduisent cet effet de décentrage par des techniques variées. Les plus académiques rajoutent une *diffusion artificielle* aux équations convectives. La convergence sera d'autant meilleure que la diffusion est importante [Batkam 2002]. Rajouter trop de diffusion peut néanmoins dénaturer la solution. C'est pourquoi, des méthodes dites "stabilisées" ont pour objectif d'optimiser cette approche. Elles feront l'objet de la partie 1.3.2.

1.2.2.2 Problèmes de diffusion pure : traitement du choc thermique

Les méthodes de Galerkin standard peuvent rencontrer des difficultés pour le traitement des problèmes de diffusion pure. En effet, ces méthodes sont assez efficaces pour des problèmes de chocs thermiques moyens mais deviennent inadéquates lorsque les chocs thermiques sont très forts entraînant ainsi, des oscillations spatio-temporelles de la température (solution du problème).

Ces oscillations non naturelles découlent du fait que ces schémas ne sont pas inconditionnellement stables et, par conséquent, doivent vérifier :

- une condition de stabilité temporelle, le critère de Courant-Friedrichs-Levy (critère CFL) liant le pas d'espace (Δx) au pas de temps (Δt), avec par exemple :

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (1.61)$$

- une condition de stabilité spatiale, la condition de profondeur de pénétration permettant de franchir une maille (Δx) pendant un pas de temps (Δt) avec par exemple :

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq \frac{1}{6} \quad (1.62)$$

Dans le cas de la simulation du forgeage, le gradient thermique à l'interface pièce/outils peut être très important. Pour éviter le problème de choc thermique, on peut utiliser des maillages très fins aux interfaces. Cela revient donc à augmenter le nombre de degrés de liberté du problème.

Dans notre cas, le maillage thermique correspond au maillage mécanique. En raffinant le maillage pour gérer les problèmes dus aux chocs thermiques, on va grandement augmenter les temps de calculs nécessaires à la résolution du problème mécanique. Les maillages utilisés sont donc créés de manière à ne pas trop pénaliser la résolution du système mécanique; ce qui peut parfois aboutir à des imprécisions lors de la résolution du problème thermique.

a) Visualisation d'un choc thermique: exemple de la barre infinie

Nous introduisons dès à présent ce cas standard monodimensionnel qui sera longuement repris lors d'une étude complémentaire au cours des chapitres 2 et 3. Considérons le refroidissement d'une barre d'acier semi-infinie, initialement à 800°C et dont l'une de ses extrémités est brutalement portée à 25°C (figure 1.3).

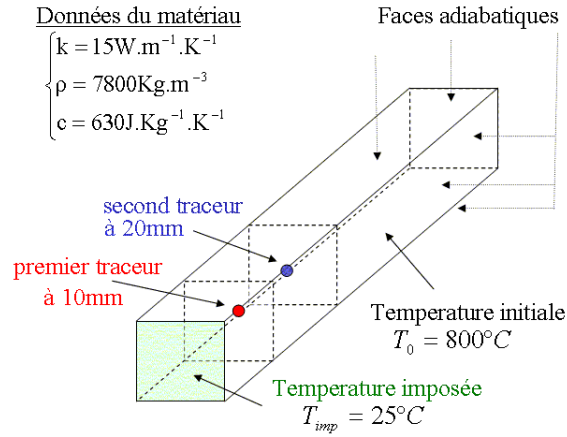


FIG. 1.3 – Refroidissement d'une barre d'acier soumise à une température imposée constante.

Si on suit l'évolution thermique en deux points de la barre (situés respectivement à 10mm et 20mm du bord régulé thermiquement), on s'aperçoit sur le graphe 1.4 que le deuxième point s'échauffe anormalement en début de simulation, alors qu'un refroidissement est imposé. Cette

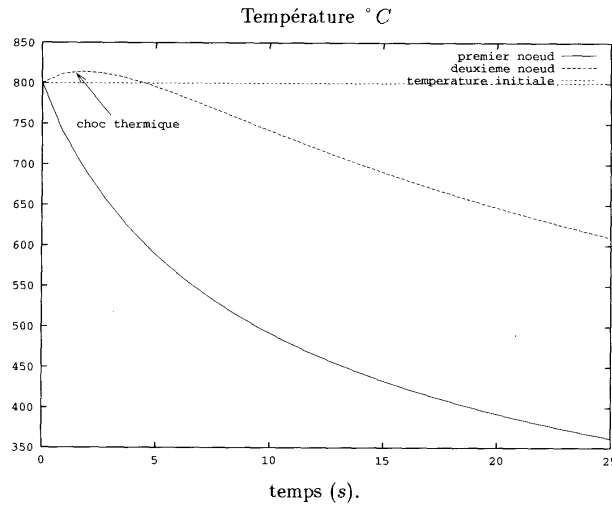


FIG. 1.4 – Mise en évidence du choc thermique au niveau du second traceur lors du refroidissement d'une barre.

évolution thermique non physique de la température traduit dans ce cas un mauvais traitement du choc thermique par la méthode de Galerkin Standard, au niveau de la matrice de conductivité K , et plus exactement au niveau du terme de diffusion $\int_{\Omega_e} k \overrightarrow{\nabla N_i} \cdot \overrightarrow{\nabla N_j}$ pendant les premiers incréments de la simulation (là où le choc thermique est ressenti le plus violemment).

b) Comment estomper le choc thermique?

- Jouer sur le pas de temps et d'espace

Une technique bien connue pour éviter ces problèmes de choc thermique est d'adapter le pas de temps et la taille de maille dans la direction du gradient. Néanmoins, elle présente un double inconvénient :

* lorsque le raffinement du maillage est très conséquent, il y a un risque indéniable de générer un nombre de noeuds et d'éléments trop importants.

* par contre, lorsqu'on joue sur le pas de temps, des conflits voire même des contradictions peuvent se produire entre les pas de temps thermiques et les pas de temps mécaniques. Pour éviter ce genre de conflits, il est possible de désynchroniser les pas de temps thermiques et mécaniques. Cette technique introduite par [Jaouen 1998] fait l'objet du paragraphe 1.2.3.

- Méthode de condensation

On peut utiliser une autre technique liée directement à la méthode de Galerkin pour la résolution de l'équation de la chaleur. C'est la méthode de condensation de la matrice diagonale qui a pour but de rendre diagonale la matrice de capacité C , issue de la discrétisation spatiale du terme de variation d'énergie dans la formulation faible de l'équation de la chaleur. Ceci permet en quelque sorte de limiter le choc thermique sur le premier élément. Cette technique atténue les oscillations. Cependant, la consistance de la méthode de Galerkin peut être altérée par la condensation [Pichelin 1998]; ce qui représente un handicap de cette méthode.

Cette technique, utilisée par [Tronel 1993] pour la simulation du refroidissement en fonderie, est peu coûteuse en nombre de noeuds et d'éléments. Néanmoins, elle reste limitée par le fait que la solution condensée n'est pas toujours précise. Lorsqu'on est en présence d'un couplage thermomécanique fort, les répercussions d'un calcul thermique peu précis sur les différents calculs mécaniques peuvent être très néfastes au bon déroulement du calcul. Toutefois [Chenot et al. 1992] proposent une solution intermédiaire introduisant une nouvelle matrice de capacité, combinaison linéaire de la matrice initiale et de la matrice condensée.

- Méthode de Galerkin Discontinue

Enfin, la technique de Galerkin Discontinue utilisée par [Pichelin-Coupez 1999] puis améliorée par [Batkam-Coupez 2001] permet également de résoudre le problème du choc thermique, en proposant cette fois une formulation mixte éléments finis sans gradient du problème thermique. Cette technique de résolution sera introduite au paragraphe 1.3.5 puis au cours du chapitre 2, puisqu'elle sert de base au développement de l'un de nos deux modèles numériques (le modèle Galerkin Discontinu Implicite § 2.2.2).

1.2.3 La thermique asynchrone

Afin d'éviter les oscillations thermiques que des maillages non adaptés pourraient occasionner, une désynchronisation entre les pas de temps mécanique et thermique peut-être envisagée. On parle alors de **thermique asynchrone**. Elle a pour rôle de rajouter de la diffusion pour stabiliser le choc thermique et permettre de rendre compatible la condition de stabilité spatio-temporelle.

En fait, on va considérer une désynchronisation entre les pas de temps des incréments et les pas de temps réels du calcul. Plus précisément, il s'agit de calculer l'évolution de la température sur un pas de temps de durée fictive, puis d'en déduire l'évolution sur le pas de temps réel.

1.2.3.1 Principe : condition de profondeur de pénétration

Le phénomène du **choc thermique** est lié :

- à la distance de pénétration h_p définie comme étant la distance à laquelle l'essentiel du choc thermique est ressenti.
- et au temps de pénétration de la chaleur t_p .

Via la diffusivité thermique $a = \frac{k}{\rho c}$, ces deux paramètres sont reliés par cette égalité :

$$t_p = \frac{h_p^2}{4a} \quad (1.63)$$

Si on se ramène à la discrétisation éléments finis de notre problème, le choc thermique sera correctement représenté lorsque le gradient thermique est décrit sur l'élément frontière de longueur caractéristique h ; autrement dit lorsque la profondeur de pénétration dépasse h . Le choc sera alors ressenti sur cet élément à partir du temps caractéristique Δt_{asyn} tel que :

$$\Delta t_{asyn} = \frac{h^2}{4a} = \frac{\rho c}{4k} h^2 \quad (1.64)$$

Ce résultat (1.64) relie le pas de temps (discrétisation temporelle) au pas d'espace (discrétisation spatiale).

En se basant sur la thèse de Yves Tronel [Tronel 1993] qui montre que les oscillations thermiques sont seulement liées à la discrétisation spatiale, [Menai 1995] établit que, pour une configuration de maillage donnée (taille de maille h imposée), le pas de temps stable qui évitera les oscillations devra satisfaire la condition de profondeur de pénétration :

$$\Delta t \geq \Delta t_{asyn} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t \geq \frac{\rho c}{4k} h^2 \quad (1.65)$$

Elle indique que pour une taille de maille donnée, plus le corps est diffusif, plus le pas d'un incrément peut-être petit. Réciproquement, pour un pas de temps donné, plus le corps est diffusif, plus la taille de maille peut-être grande.

Cette relation (1.65) définit donc un pas de temps minimal pour lequel la thermique ne présentera pas d'oscillations du champ de température, c'est à dire pour lequel le choc thermique sera correctement géré.

1.2.3.2 Intégration de la thermique asynchrone dans un code 3D EF

Suite aux travaux menés par [Aliaga 2000], la technique de désynchronisation des pas de temps thermique et mécanique a été implémentée dans le code Forge3[®]. Pour cela, il a fallu éclaircir plusieurs points.

- Il est possible que le pas de temps minimal défini par la relation (1.65) ne corresponde pas forcément au pas de temps désiré et utilisé lors du calcul mécanique.

Si l'on est dans la situation où le pas de temps désiré Δt ne correspond pas au critère de choc (1.65), la température solution T_{n+1} pour Δt est calculée à partir de T_{n+1}^{asyn} (solution du problème thermique) avec Δt_{asyn} qui, lui, convient au critère de choc, de la manière suivante :

$$T_{n+1} = T_n + (T_{n+1}^{asyn} - T_n) \frac{\Delta t}{\Delta t_{asyn}} \quad (1.66)$$

Cela correspond donc à effectuer une interpolation linéaire au pas de temps réel de l'incrément pour obtenir les températures souhaitées de l'incrément.

Remarque 1.9 Cette relation linéaire (1.66) est consistante avec le schéma d'intégration.

En effet, en exprimant la dérivée temporelle de T_{n+1}^{asyn} à l'aide de la définition (1.40), on a :

$$\frac{dT_{n+1}^{asyn}}{dt} \approx \frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{\Delta t_1} + \frac{\gamma_1 T_n + \gamma_2 T_{n+1}^{asyn}}{\Delta t_2} \approx \frac{\partial T^*}{\partial t} \quad (1.67)$$

Les dérivées étant égales, la thermique asynchrone est assimilée à une linéarisation du problème thermique.

- La relation (1.64) est une relation monodimensionnelle.

En somme, appliquer une condition de thermique asynchrone dans un calcul 3D va poser le problème de la détermination de h : les éléments sont tétraédriques, le maillage est non structuré, la taille des éléments est hétérogène.

Dans l'idéal, il faudrait déterminer h à partir de la taille des arêtes des éléments surfaciques projetés dans le sens du flux thermique (figure 1.5). Mais cette mesure est bien trop coûteuse.

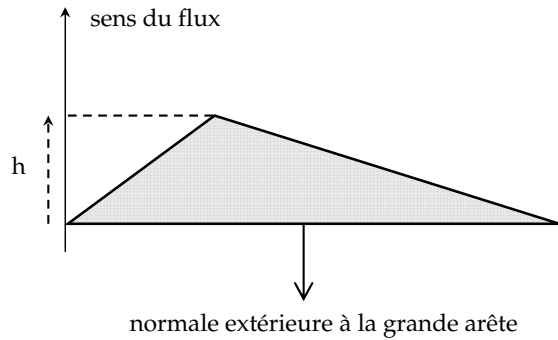


FIG. 1.5 – Représentation 2D d'une mesure objective de la taille de maille h [Aliaga 2000].

C'est pourquoi, [Aliaga 2000] a mis au point une méthode plus rapide, mais tout autant efficace, en déterminant le pas de temps Δt_{asyn} comme suit :

$$\begin{cases} \Delta t_{asyn} = \frac{\sum_{elt \in \partial\Omega} \sum_{noe} (p * d_{noe, noe-1})^2 \frac{1}{a(T)}}{nbelt} \\ \Delta t_{asyn} = \max(\Delta t_{asyn}, \Delta t) \end{cases} \quad (1.68)$$

$d_{noe, noe-1}$ correspond à la plus grande distance séparant deux noeuds du même élément, p est défini par l'utilisateur comme étant un poids afin de prendre en compte l'anisotropie du maillage par rapport au flux thermique. Cela revient à prendre la moyenne sur le maillage du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre en tenant compte des variables locales de la diffusivité $a(T)$ thermodépendantes. Evidemment si ce pas de temps est plus petit que celui désiré, alors le pas de temps asynchrone est pris égal au pas de temps voulu.

- La méthode de la thermique asynchrone consiste à utiliser un pas de temps suffisamment grand, de manière à ce que la diffusion créée atteigne la seconde couche de noeuds sous la surface et évite ainsi les oscillations spatiales.

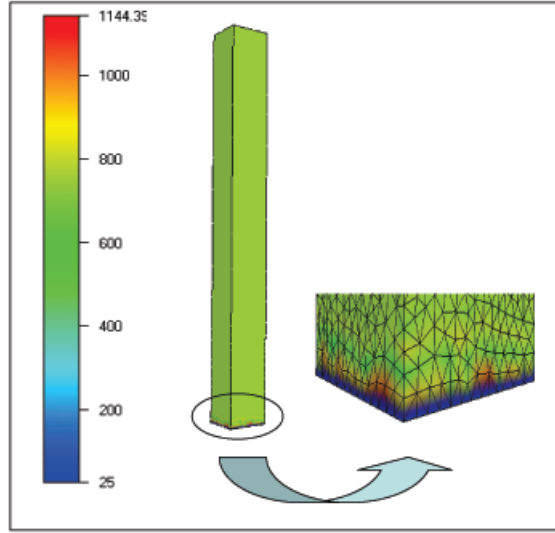


FIG. 1.6 – Visualisation du choc thermique sur la première couche des éléments.

1.2.3.3 Exemples d'utilisation de la thermique asynchrone pour un calcul 3D

a) Test de soudage avec frottement inertiel

[D'Alvise 2002] présente un test de soudage avec frottement inertiel mettant en évidence un choc thermique. Les conditions du test (tableau 1.2) sont telles que le pas de temps optimal vaut :

$$\Delta t_{asyn} = \frac{0,6^2}{4 * 5,44} = 0,0165 \text{ s}.$$

capacité c	conductivité k	masse volumique ρ	diffusivité a	maillage h
$6.10^8 \text{ mm}^2.s^{-2}.K^{-1}$	$26110 \text{ g.mm.s}^{-3}.K^{-1}$	$8.10^{-6} \text{ g.mm}^{-3}$	5,44	0,6 mm

TAB. 1.2 – Propriétés thermiques et maillage.

La figure 1.7 compare l'évolution de la température obtenue en utilisant une méthode Galerkin standard synchrone (bien évidemment avec $\Delta t_{syn} \neq \Delta t_{asyn}$) et une méthode Galerkin asynchrone: la méthode asynchrone donne de meilleurs résultats au début du réchauffement avec un choc thermique correctement lissé.

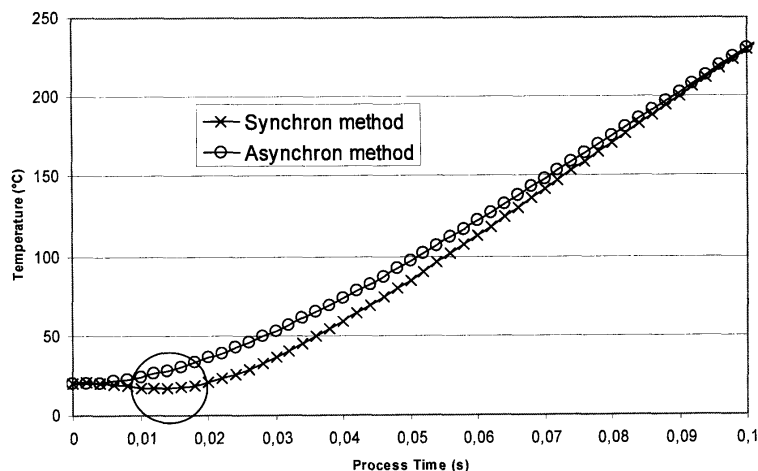


FIG. 1.7 – Comparaison entre la thermique synchrone et asynchrone [D'Alvise 2002].

b) Reprise de l'exemple monodimensionnel de la barre

Sur le test monodimensionnel de la barre semi-infinie, nous avons vu qu'un choc thermique se produisait au niveau du deuxième traceur à 20mm. [Aliaga 2000] reprend ce test en appliquant la technique de désynchronisation afin de voir si le choc se produit encore ou au contraire est estompé.

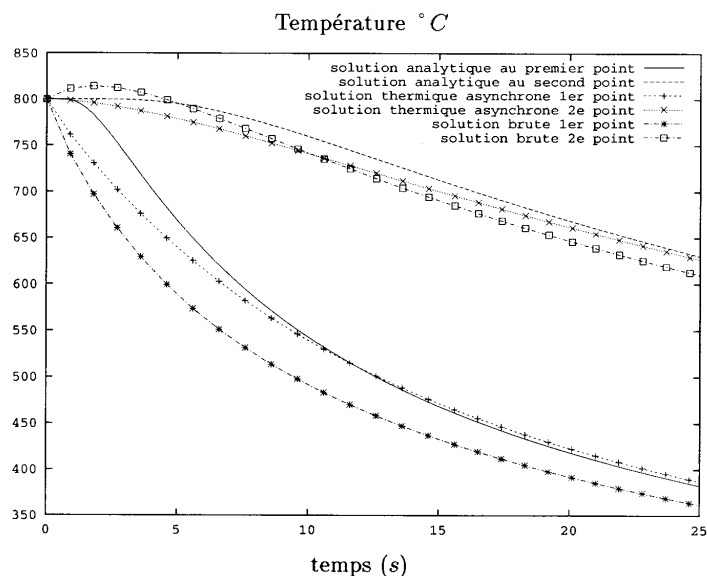


FIG. 1.8 – Stabilisation du choc thermique par la thermique asynchrone [Aliaga 2000].

La figure 1.8 représente pour les deux traceurs l'évolution thermique analytique (cf p.63), mais aussi la solution numérique Galerkin Standard synchrone et la solution GS obtenue en utilisant la méthode asynchrone, c'est à dire avec un pas de temps respectant l'équation (1.64). La solution est encore éloignée de la solution analytique mais ne présente plus d'oscillation thermique.

Ceci illustre bien le fait que la thermique asynchrone a pour rôle de rajouter de la diffusion pour stabiliser le choc thermique.

On peut également voir sur le premier traceur que le fait de rajouter cette diffusion a tendance à dénaturer la solution avec un éloignement significatif des courbes analytique et numérique asynchrone pendant les premiers incréments.

Une étude comparative est également faite sur l'influence des maillages : à taille de maille h identique, on compare l'évolution thermique des deux capteurs obtenue avec un maillage structuré et un maillage non structuré. Les résultats présentés sur la figure 1.9 montrent que la thermique asynchrone est stable vis-à-vis du maillage. En effet, pour une même valeur de h , les courbes obtenues avec un maillage structuré sont semblables à celles obtenues avec un maillage non structuré.

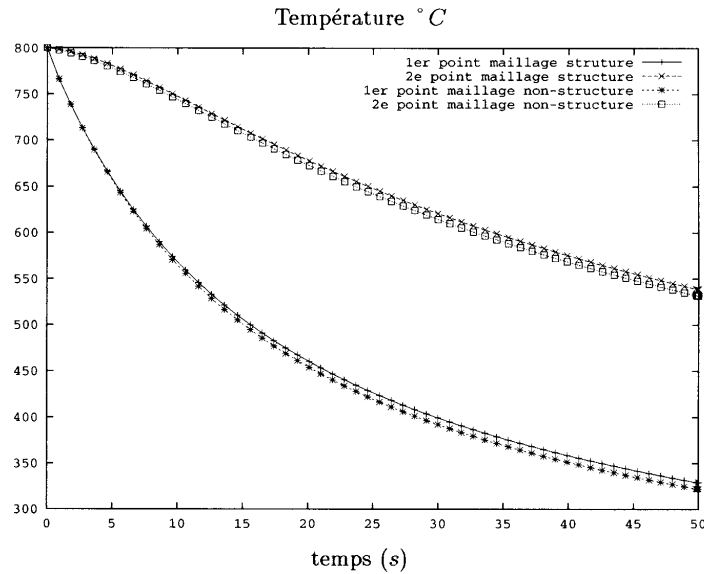


FIG. 1.9 – Comparaison entre maillage structuré et non structuré pour une taille de maille h identique très fine [Aliaga 2000].

1.2.4 Variation de la thermique asynchrone : la méthode de diffusion partitionnée (diffusion-split)

La résolution thermique basée sur les éléments finis standards linéaires tétraédriques peut donc localement être affectée par des extréma non physiques dans les régions sensibles aux chocs thermiques, au point de décourager l'utilisation de ces éléments.

Pourtant [Fachinotti 2004] développe la méthode de diffusion partitionnée, encore appelée la méthode diffusion-split. Cette méthode originale a la particularité de combiner deux approches qui traitent du choc thermique avec des éléments finis P_1 , sans aucune technique de raffinement du maillage :

- la première approche découle de la condition de profondeur de pénétration [Jaouen 1998], introduite précédemment par la thermique asynchrone (1.65),
- et la seconde approche basée sur la théorie des M-matrices [Ortega 1970] : le principe du maximum [Brezis 1991] (équivalent à la condition CFL) est satisfait si le système matriciel obtenu après discrétisation est de la forme M-matrice.

Définition 1.1 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n non singulière. On dira que A est une M -matrice si :

$$\begin{cases} A^{-1} \geq 0 \\ \text{et} \\ a_{ij} \leq 0 \quad \text{pour } i \neq j, 1 \leq i, j \leq n \end{cases} \quad (1.69)$$

1.2.4.1 Principe

En fait, [Fachinotti 2004] propose une légère modification de l'équation de la chaleur discrète (1.32) afin d'obtenir une formulation M -matrice du système matriciel, assurant ainsi une oscillation libre de la solution, tout en gardant à l'idée de satisfaire la condition de profondeur de pénétration (1.65).

Repartant de la formulation originelle discrète du problème thermique (1.32) déduite de la méthode Galerkin standard avec des éléments P_1 :

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{K} \mathbf{T} - \mathbf{Q} = 0, \quad (1.70)$$

l'auteur utilise un schéma d'Euler implicite pour intégrer (1.70) en temps :

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{T}^{t+\Delta t} - \mathbf{T}^t}{\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{T}^{t+\Delta t} - \mathbf{Q} = 0 \quad (1.71)$$

Il rappelle aussi que, pour un maillage de taille d'élément uniforme h , l'incrément de temps Δt_{asyn} donné par la relation :

$$\Delta t_{\text{asyn}} = \alpha \frac{\rho c}{k} h^2 \quad (1.72)$$

satisfait la condition de profondeur de pénétration et ainsi modélise proprement le choc thermique; α étant une constante du premier ordre [Wagoner-Chenot 2001].

D'autre part, comme les solutions non-physiques observées dans le cas de choc thermique sont généralement associées à la forme du système matriciel, et notamment à la forme de la matrice de conductivité \mathbf{K} , l'auteur réécrit le système d'équations (1.71) en fractionnant ce terme de diffusion comme suit :

$$\boxed{\mathbf{C} \frac{\mathbf{T}^{t+\Delta t} - \mathbf{T}^t}{\Delta t} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{T}^{t+\Delta t} - \mathbf{F} = \mathbf{S}} \quad (1.73)$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{S} &= (\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K}) \mathbf{T}^{t+\Delta t} \\ \tilde{K}_{ij} &= \int_{\Omega} \tilde{k} \overrightarrow{\nabla N_i} \cdot \overrightarrow{\nabla N_j} d\Omega + \int_{\Gamma} h N_i N_j dS \end{cases} \quad (1.74)$$

Pour que l'expression (1.74) soit complète, l'auteur doit encore définir \tilde{k} . Pour cela, il suppose que S est un terme source explicite :

$$\mathbf{S} \approx (\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K}) \mathbf{T}^t \quad (1.75)$$

Ainsi, la conductivité augmentée \tilde{k} pourra être définie pour satisfaire la condition de profondeur de pénétration pour Δt , le premier pas de temps :

$$\tilde{k} = \begin{cases} k & \text{si } \Delta t_{\text{asyn}} \leq \Delta t \\ k \frac{\Delta t_{\text{ts}}}{\Delta t} & \text{si } \Delta t_{\text{asyn}} > \Delta t \end{cases} \quad (1.76)$$

Quand $t + \Delta t \geq \Delta t_{\text{asyn}}$, la valeur de \tilde{k} va décroître avec le temps, de la valeur déduite de l'équation (1.76) à l'instant $t = 0$ à la conductivité réelle k (figure 1.10). Dans ce cas-ci, les équations (1.71) et (1.73) seront identiques.

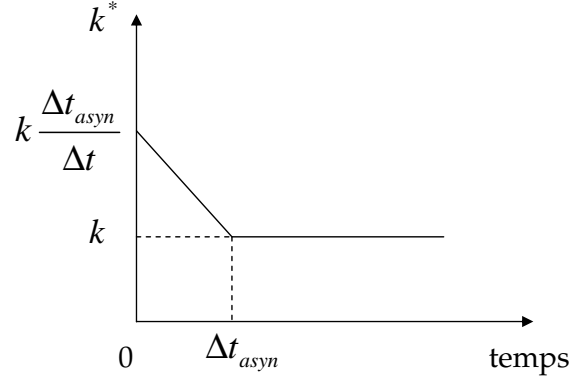


FIG. 1.10 – Evolution de la conductivité augmentée \tilde{k} .

1.2.4.2 Exemple

Pour valider sa méthode, l'auteur se penche une fois de plus sur le cas classique de la barre d'acier semi-infinie à température imposée ($T_0 = 800^\circ\text{C}$ et $T_{\text{imp}} = 25^\circ\text{C}$). Il opte pour un pas de temps constant $\Delta t = 0,1\text{s}$ et pour un maillage structuré avec une taille de maille $h = 2\text{mm}$ (dans la direction du flux).

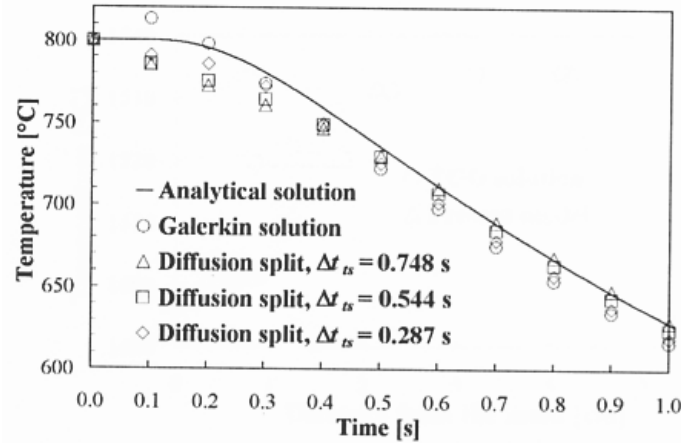


FIG. 1.11 – Evolution de la température pour un traceur situé à 4mm du bord thermiquement imposé [Fachinotti 2004].

Dans ce cas, la solution GS est affectée par un choc thermique mis en évidence par l'augmentation non physique de la température de $13,2^\circ\text{C}$ au premier incrément pour un noeud situé à 4mm du bord régulé thermiquement (figure 1.11). Bien évidemment, la méthode de diffusion fractionnée avec $\Delta t_{\text{asyn}} = 0,748\text{s}$ donne d'excellents résultats, avec un refroidissement normal. On peut noter que l'auteur teste deux autres valeurs de Δt_{asyn} , l'une provenant de la valeur minimale de h ($\Delta t_{\text{asyn}} = 0,544\text{s}$) et l'autre en tolérant d'une légère erreur de la température ($0,1^\circ\text{C}$) avec $\Delta t_{\text{asyn}} = 0,287\text{s}$.

1.2.5 Conclusion

Nous venons de voir la résolution standard du problème thermique instationnaire à l'aide de la méthode de Galerkin standard. Cette dernière génère des instabilités pour des problèmes fortement convectifs et rencontre des difficultés pour traiter les chocs thermiques, en cas de refroidissement ou réchauffement trop sévère.

En effet, nous avons vu que la méthode Galerkin standard n'est pas assez robuste et qu'elle conduit à des oscillations spatiales du champ de température quand le refroidissement/réchauffement est rapide. Ces problèmes proviennent directement de la taille de maille en surface et du pas de temps utilisé, tous deux liés pour obtenir une solution éléments finis stable et non-oscillante.

Raffiner le maillage serait intuitivement une possibilité pour éviter le choc thermique. Cependant la limitation de cette technique est due uniquement à l'énorme coût de calcul induit par la construction d'un tel maillage.

La thermique asynchrone, associée à une formulation de Galerkin standard, permet dans une gamme de tailles de maille de lisser le choc thermique et d'obtenir un champ de température acceptable, qui permettra de résoudre un calcul thermomécanique. Toutefois, elle a ses limites et lorsque le choc devient violent, elle peut dénaturer la solution et conduire à un champ de température apparemment correct mais assez loin de la réalité, puisque la thermique asynchrone rajoute de la diffusion lors des premiers instants du calcul afin d'estomper le choc thermique.

Enfin, représentant une légère modification de la formulation originelle Galerkin standard, la méthode de diffusion partitionnée est facilement programmable dans n'importe quel code de calcul éléments finis. Avec des éléments finis linéaires P_1 , elle s'avère très performante pour traiter le choc thermique, parfois violent, apparaissant par exemple lors du processus de solidification.

Pour résoudre toutes ces difficultés engendrées par l'utilisation de l'approche Galerkin standard (synchrone mais également asynchrone), plusieurs techniques de stabilisation sont présentées dans la section suivante.

1.3 Autres méthodes de résolution pour les problèmes de convection/diffusion

Dans cette partie présentée comme une revue bibliographique, nous étudions le problème général de convection/diffusion instationnaire. Diverses techniques de résolution vont être décrites. On commencera par les méthodes stabilisées, puis par la méthode de Taylor Galerkin qui peut être également considérée comme une méthode stabilisée. Ensuite, nous évoquerons une méthode non stabilisante offrant de nombreux avantages, la méthode de Galerkin Discontinue.

1.3.1 Formulation du problème de convection/diffusion

L'équation différentielle régissant le problème de convection/diffusion d'un champ scalaire inconnu u prend la forme :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u - \nabla \cdot (\nu \vec{\nabla} u) = f \quad \text{dans } \Omega \times]0, t[} \quad (1.77)$$

où \vec{v} représente la vitesse de convection, $\nu > 0$ le coefficient de diffusion et f un terme source. Le problème est résolu sur le domaine Ω , dans l'intervalle de temps $]0, t[$.

En introduisant respectivement les opérateurs de convection, de diffusion et de convection/diffusion, le problème général de convection/diffusion (1.77) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}(u) = f \quad \text{dans } \Omega \times]0, t[\\ \mathcal{L}(u) = \mathcal{L}_{conv}(u) + \mathcal{L}_{diff}(u) \\ \mathcal{L}_{conv}(u) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u \\ \mathcal{L}_{diff}(u) = \nabla \cdot (-\nu \vec{\nabla} u) \end{array} \right. \quad (1.78)$$

Ce problème doit être complété par diverses conditions initiales et aux limites; le lecteur intéressé pourra, par exemple, se référer aux articles de [Codina 1998] et de [Hughes et al. 1989].

Pour écrire la formulation faible de l'équation (1.77), nous rajoutons la condition aux limites sur l'ensemble de la frontière $\partial\Omega$ telle que :

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.79)$$

Ainsi, en supposant que $f \in L^2(\Omega)$, la formulation faible associée au problème de convection/diffusion s'écrit :

Trouver $u \in L^2(0, t; H_0^1(\Omega))$ tel que :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, w \right)_\Omega + a(u, w) - l(w) = 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (1.80)$$

$$\text{avec les notations} \quad \left\{ \begin{array}{l} a(u, w) = \int_\Omega \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u \, w \, d\Omega + \int_\Omega \nu \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} w \, d\Omega \\ l(w) = \int_\Omega f \, w \, d\Omega \end{array} \right. \quad (1.81)$$

En approchant l'espace $H_0^1(\Omega)$ par un espace de dimension finie \mathcal{W}_h (espace des fonctions d'interpolation), nous sommes en mesure d'appliquer la méthode de Galerkin standard à l'équation (1.80) et donc d'exprimer la formulation faible discrète du problème de convection/diffusion :

Trouver $u_h \in L^2(0, t; \mathcal{W}_h)$ tel que :

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, w_h \right)_\Omega + a(u_h, w_h) - l(w_h) = 0 \quad \forall w_h \in \mathcal{W}_h \quad (1.82)$$

1.3.2 Les méthodes stabilisées

Le principe de ces méthodes consiste à **rajouter un terme de stabilisation** au membre de gauche de la formulation originelle de Galerkin standard (1.82). Nous verrons, par contre, que ce principe ne s'applique pas forcément à la lettre. En effet, la méthode de Galerkin Least-Squares est traditionnellement basée sur une formulation faible espace/temps tandis que la méthode de Taylor Galerkin part d'une intégration temporelle particulière de l'équation différentielle (1.77) avant d'obtenir sa formulation faible sur laquelle est faite son approximation.

[Codina 1998] compare quelques unes de ces méthodes :

- la méthode Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG),

- la méthode Space-Time/Galerkin Least-Squares (ST/GLS),
- la méthode Caractéristiques Galerkin (CG),
- la méthode Subgrid Scale (SGS),
- et la méthode Taylor Galerkin (TG).

Pour chacune d’elles, l’auteur précise la forme du terme de stabilisation qui va s’écrire de manière générale comme le produit (sur chaque élément) du résidu de l’équation à résoudre $\mathcal{R}^K(w_h)$ par un opérateur $\mathcal{P}^K(w_h)$ appliqué aux fonctions tests et par un paramètre de stabilisation τ_K , soit :

$$r(u_h, w_h) = \sum_{K \subset \Omega_h} \int_K \tau_K \mathcal{P}^K(w_h) \mathcal{R}^K(w_h) d\Omega. \quad (1.83)$$

où τ_K est le coefficient de stabilité, souvent appelé ”temps intrinsèque”.

Nous choisissons de présenter ici seulement les méthodes SUPG, ST/GLS et Taylor Galerkin en décrivant, pour chacune d’elles, le terme $r(u_h, w_h)$ et, plus précisément, la forme de son opérateur de perturbation.

1.3.2.1 Les méthodes Streamline Upwind et Streamline Upwind Petrov Galerkin

L’idée de base de ces méthodes est de perturber les fonctions test w_h en introduisant de nouvelles fonctions tests \tilde{w}_h définies par :

$$\tilde{w}_h = w_h + \tau \vec{v} \cdot \vec{\nabla} w_h \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\alpha h}{2} \quad [\text{Codina 1998}]. \quad (1.84)$$

a) La méthode Streamline Upwind (SU)

La perturbation de w_h (1.84) ne s’applique qu’au terme de convection \mathcal{L}_{conv} entraînant ainsi l’apparition d’un nouveau terme (1.85) dans la formulation faible discrète (1.82) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, w_h \right)_{\Omega} + a(u_h, w_h) + b(u_h, w_h) - l(w_h) = 0 \quad \forall w_h \in \mathcal{W}_h \\ b(u_h, w_h) = \int_{\Omega} \tau (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} u_h) (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} w_h) d\Omega \end{array} \right. \quad (1.85)$$

Ce terme symétrique de nature elliptique s’apparente bien à la diffusion numérique rajoutée uniquement dans le sens de l’écoulement. D’où le nom de cette méthode ”Streamline Upwind” notée SU (diffusion le long d’une ligne de courant). Le schéma ainsi construit s’avère stabilisant mais présente l’inconvénient de résoudre un problème modifié par rapport au problème originel.

b) La méthode Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG)

La méthode Streamline Upwind Petrov Galerkin combine à la fois une méthode Streamline Upwind, décrite ci-dessus, et une méthode Petrov Galerkin qui permet d’utiliser un espace des fonctions tests différent de celui de la solution.

Par rapport à la méthode Streamline Upwind, l’idée de cette nouvelle méthode est de rendre le problème consistant. Elle consiste à rajouter de la diffusion dans un problème de convection pure en utilisant, cette fois-ci, les fonctions tests perturbées \tilde{w}_h sur l’ensemble de la formulation discrète (1.82) [Hughes et al. 1989].

Le nouveau problème discret s'écrit alors :

Trouver $u_h \in L^2(0, t; \tilde{T}_h)$ tel que :

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \tilde{w}_h \right)_\Omega + \tilde{a}(u_h, \tilde{w}_h) - l(\tilde{w}_h) = 0 \quad \forall \tilde{w}_h \in \tilde{T}_h \quad (1.86)$$

Cette formulation (1.86) est dite "Streamline Upwind Petrov Galerkin", notée SUPG. Le schéma SUPG obtenu est bien consistant et induit un système linéaire de la forme :

$$C \frac{\partial u}{\partial t} + K u = Q$$

A l'aide de (1.86), [Codina 1998] en déduit l'expression de l'opérateur \mathcal{P}^K et du résidu \mathcal{R}^K , intervenant dans l'expression du terme de stabilisation $r(u_h, w_h)$ (1.83) :

$$\mathcal{P}_{SUPG}(w_h) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} w_h) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{SUPG}(u_h) = \frac{\partial u_h}{\partial t} + \mathcal{L}(u_h) - f \quad (1.87)$$

1.3.2.2 La méthode Space-Time/Galerkin Least-Squares (ST/GLS)

Pour résoudre le problème stationnaire de convection/diffusion, [Hughes et al. 1989] proposent l'approche Galerkin Least-Squares (GLS), initialement développée pour résoudre le problème de Stokes (1.88) :

Avec f et g fonctions données sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^d , trouver v et p tels que :

$$\begin{cases} \Delta v + \vec{\nabla} p = f & \text{dans } \Omega \\ \text{div } v = g & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.88)$$

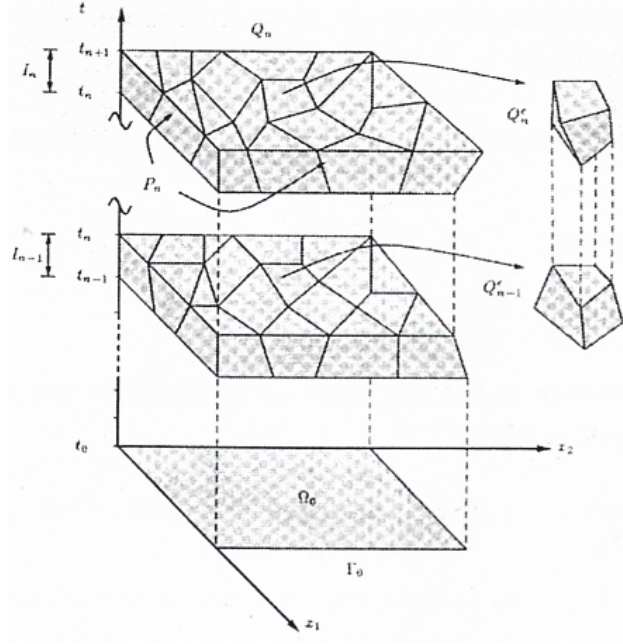
C'est une approche voisine de la méthode SUPG qui s'applique à une grande variété de classes de problèmes.

La méthode Galerkin Least-Squares [Ern-Germond 2000] est conceptuellement plus simple et plus générale avec le rajout d'un seul terme de stabilité à la formulation Galerkin standard (en fait c'est un terme de résidu de forme moindre carrée) tout en préservant le contrôle sur ce terme pour qu'il ne détériore pas la précision de la solution [Hughes et al. 1989].

La généralisation de la méthode GLS obtenue à partir du problème stationnaire va permettre de résoudre le problème instationnaire : les schémas GLS sont accompagnés d'une intégration temporelle. C'est généralement vers une discrétisation par éléments finis espace/temps que le choix se porte [Hughes et al. 1989, Cockburn et al. 2000]; on parle alors de méthodes Space-Time/Galerkin least squares, notées ST/GLS.

La discrétisation en espace-temps [Thomée 1997] consiste à résoudre le problème fort sur un domaine spatio-temporel $\Omega \times]0, T[$ (figure 1.12), divisé en tranches spatio-temporelles $\Omega \times]t_n, t_{n+1}[$, voire même en éléments spatio-temporels $K \times]t_n, t_{n+1}[$.

Le principe est le suivant : on applique une méthode de Galerkin discontinue en temps [Thomée 1997] de manière à résoudre le problème sur des tranches spatio-temporelles $\Omega \times]t_n, t_{n+1}[$, en imposant faiblement la condition de continuité à l'instant t_n , puis la méthode GLS.

FIG. 1.12 – *Domaine 2D spatio-temporel $\Omega \times]0, T[$ [Thompson-Pinsky 1996].*

a) La méthode de Galerkin discontinue en temps

Le champ inconnu u est interpolé par des polynômes de degré n en espace et en temps, continus en espace mais discontinus en temps; ce qui revient à supposer que le champ inconnu et les fonctions tests sont discontinus entre les tranches spatio-temporelles.

Définition 1.2 On note u_+^n la limite sup de u lorsque $t \rightarrow t_n$ et par u_-^n la limite inf de u lorsque $t \rightarrow t_n$.

En imposant faiblement la condition de continuité $u_+^n = u_-^n$ sur l'approximation EF u_h , la formulation faible obtenue sur la tranche spatio-temporelle $Q^n = \Omega \times]t_n, t_{n+1}[$ est donnée par :

$$\int_{Q^n} \left[\frac{\partial u_h}{\partial t} w_h + \vec{v} \cdot \nabla u_h w_h + \nu \nabla u_h \cdot \nabla w_h \right] d\Omega dt + \int_{\Omega} (u_{h+}^n - u_{h-}^n) w_{h+}^n d\Omega = \int_{Q^n} f w_h d\Omega dt$$

$$\Updownarrow \quad (1.89)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, w_h \right)_{\Omega} + a(u_h, w_h) \right] dt + \left(u_{h+}^n - u_{h-}^n, w_{h+}^n \right)_{\Omega} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f, w_h)_{\Omega} dt$$

$$\text{Soit } \begin{cases} B(u_h, w_h)_n = L(w_h)_n \\ B(u_h, w_h)_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, w_h \right)_{\Omega} + a(u_h, w_h) \right] dt + (u_{h+}^n, w_{h+}^n)_{\Omega} \\ L(w_h)_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f, w_h)_{\Omega} dt + (u_{h-}^n, w_{h+}^n)_{\Omega} \end{cases} \quad (1.90)$$

Pour [Codina 1998], la méthode ST/GLS peut-être facilement formulée à partir de l'équation

(1.90) : il suffit de rajouter à cette équation une forme moindre carrée des résidus qui correspondra au terme de stabilisation (1.83). On en déduit alors :

$$\mathcal{P}_{ST/GLS}(w_h) = \frac{\partial w_h}{\partial t} + \mathcal{L}(w_h) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{ST/GLS}(u_h) = \frac{\partial u_h}{\partial t} + \mathcal{L}(u_h) - f \quad (1.91)$$

b) La méthode GLS (en espace/temps)

A partir du problème fort de convection/diffusion (1.78) qui, rappelons-le, s'écrit :

$$\mathcal{L}_t u = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = f, \quad (1.92)$$

[Hughes et al. 1989] en déduisent l'expression suivante :

$$\begin{cases} B_{GLS}(u_h, w_h)_n = L_{GLS}(w_h)_n \quad \forall n \in [0, N-1] \\ B_{GLS}(u_h, w_h)_n = B(u_h, w_h)_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\tau \mathcal{L}_t w_h, \mathcal{L}_t u_h)_{\tilde{\Omega}} dt \\ L_{GLS}(w_h)_n = L(w_h)_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\tau \mathcal{L}_t w_h, f)_{\tilde{\Omega}} dt \end{cases} \quad (1.93)$$

Pour ce problème instationnaire, l'auteur en déduit aussi une expression pour la méthode SUPG utilisée sur une discrétisation espace/temps :

$$\begin{cases} B_{SUPG}(u_h, w_h)_n = L_{SUPG}(w_h)_n \quad \forall n \in [0, N-1] \\ B_{SUPG}(u_h, w_h)_n = B(u_h, w_h)_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\tau (\frac{\partial w_h}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} w_h), \mathcal{L}_t u_h)_{\tilde{\Omega}} dt \\ L_{SUPG}(w_h)_n = L(w_h)_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\tau (\frac{\partial w_h}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} w_h), f)_{\tilde{\Omega}} dt \end{cases} \quad (1.94)$$

Remarque 1.10 *Le calcul de τ est similaire pour ces deux méthodes.*

1.3.3 La méthode de Taylor Galerkin (TG)

La méthode de Taylor Galerkin a été introduite par [Donea 1984] comme version éléments finis du schéma de différences finies de Lax-Wendroff. Elle est capable de construire des schémas numériques d'une grande précision pour la solution des problèmes de transport convectif à une ou plusieurs dimensions spatiales. Elle améliore également les propriétés de stabilité, notamment par rapport à la méthode conventionnelle de Galerkin.

1.3.3.1 Principe

L'idée générale est d'exprimer au même moment et jusqu'à un ordre élevé les dérivées spatiales et temporelles. On enrichit pour cela l'expression de la dérivée temporelle par un développement en série de Taylor dans lequel on exprime chacune des dérivées temporelles d'ordre élevé en fonction des dérivées spatiales (ceci étant obtenu en dérivant successivement l'équation forte du problème à résoudre).

Afin de préserver la simplicité et la facilité de l'implémentation de son schéma, [Donea 1984] choisit un développement explicite (de Taylor) d'ordre 3 (stabilité du schéma assurée).

1.3.3.2 Application à l'équation scalaire 1D de convection

Pour illustrer la méthode de Taylor Galerkin, [Donea 1984] considère un exemple simple, en résolvant l'équation $u_t = a u_x$ (où a est une constante positive).

Pour résoudre cette équation 1D, il s'appuie en premier lieu sur trois techniques d'approximations temporelles avant d'appliquer la formulation Galerkin en vue d'obtenir l'écriture complète de l'équation discrète :

- une technique basée sur un pas de temps "arrière" : la discrétisation de la dérivée temporelle s'exprime par un schéma d'Euler c'est à dire :

$$u_t^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = a u_x^n \quad (1.95)$$

ce qui va faire intervenir le développement de Taylor explicite pour u_t à l'instant n :

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t u_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}^n + \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt}^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_{ttt} = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \end{cases} \quad (1.96)$$

- une technique basée sur un pas de temps "saute-mouton" (leap-frog) : la discrétisation de la dérivée temporelle s'exprime par un schéma de différence finie centrée :

$$u_t^n = \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2 \Delta t} = a u_x^n \quad (1.97)$$

Deux développements de Taylor sont donc nécessaires pour utiliser cette discrétisation centrée :

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t u_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}^n + \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt}^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ u^{n-1} = u^n - \Delta t u_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}^n - \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt}^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \end{cases} \quad (1.98)$$

- une technique basée sur un pas de temps de Crank-Nicholson : la discrétisation se fait par un schéma standard de Crank-Nicholson :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} a (u_x^n + u_x^{n+1}) \quad (1.99)$$

avec l'utilisation des développements de Taylor suivants :

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t u_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}^n + \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt}^n + \dots \\ u^n = u^{n+1} - \Delta t u_t^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}^{n+1} - \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt}^{n+1} + \dots \end{cases} \quad (1.100)$$

Plus de détails sont donnés dans l'Annexe B.

Remarque 1.11 *Le schéma de Taylor Galerkin explicite (noté ETG par l'auteur) admet une précision d'ordre 3, contrairement aux schémas de Taylor Galerkin, qui munis d'un développement différence finie centrée (noté LFTG) ou d'un développement de Crank-Nicholson (noté CNTG), sont précis à l'ordre 4.*

En effet, lors de la discrétisation temporelle, la méthode de Taylor Galerkin n'a besoin que d'une précision du 2^{ème} ordre sur le pas de temps tandis que la discrétisation spatiale Galerkin standard (sur un maillage uniforme) nécessite une précision spatiale d'ordre 4.

1.3.3.3 Application au problème 3D de convection/diffusion

Le développement de Taylor explicite à l'ordre 3 de u , solution du problème de convection/diffusion (1.78), s'écrit à l'instant n [Codina 1998] :

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \\ \frac{\partial u^n}{\partial t} = f - \mathcal{L}(u^n) \end{cases} \quad (1.101)$$

Précisons que l'ordre du développement de Taylor doit être au minimum de 3 pour assurer la stabilité du schéma.

$$(1.101) \Leftrightarrow u^{n+1} = u^n + [f - \mathcal{L}(u^n)] \Delta t + \left[\frac{\partial f^n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{L}(u))^n \right] \frac{\Delta t^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (1.102)$$

En supposant que f est indépendant de t , le terme $\frac{\partial f}{\partial t}$ s'annule, et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{L}(u)) = \mathcal{L} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \mathcal{L}(f - \mathcal{L}(u)) \quad (1.103)$$

D'autre part, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 3, on obtient en dérivant successivement la deuxième équation de (1.101) :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = f - \mathcal{L}(u^n) - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{L}(f - \mathcal{L}(u))^n \quad (1.104)$$

L'écriture de la formulation faible fait alors intervenir l'expression suivante :

$$\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} w \mathcal{L}(f - \mathcal{L}(u^n)) d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathcal{L}^*(w) (f - \mathcal{L}(u^n)) d\Omega$$

où $\mathcal{L}^*(w)$ est donné par [Codina 1998] qui en déduit finalement :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{TG}(w_h) = -\mathcal{L}^*(w_h) = \mathcal{L}_{conv}(w_h) + \mathcal{L}_{diff}(w_h) \\ \mathcal{R}_{TG}(u_h) = \mathcal{L}(u_h) - f \end{cases} \quad (1.105)$$

Remarque 1.12 Dans le cas purement convectif ($\nu = 0$), les travaux de [Donea 1984] montrent que le schéma de Taylor Galerkin peut être vu comme une formulation SUPG en choisissant de prendre :

$$\tilde{w}_h = w_h + \frac{\Delta t}{2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} w_h \quad (1.106)$$

Le développement actuel de la méthode de Taylor (1.101) est seulement valable pour déduire des schémas explicites. En ce qui concerne l'obtention du schéma implicite, il faut partir d'un développement de Taylor qui permet d'exprimer u_n à l'aide de termes de valeurs au pas de temps $n+1$ [Codina 1998] :

$$u^n = u^{n+1} - \Delta t \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (1.107)$$

Remarque 1.13 Le choix d'un algorithme implicite et semi-implicite permet d'obtenir de plus grands pas de temps mais cela n'implique pas nécessairement une amélioration globale de l'erreur [Ortiz 1992].

Remarque 1.14 Une autre approche consiste à traiter uniquement le terme de convection avec la technique de Taylor Galerkin. C'est l'approche utilisée par [Khelifa et al. 1995] qui mettent en place un schéma dit de Taylor Galerkin/splitting, basé sur un fractionnement en temps de l'équation de convection/diffusion (1.77). Le terme de diffusion est alors traité par une approche standard de type Galerkin θ -schéma puisqu'il pose beaucoup moins de problèmes de stabilité.

1.3.4 Quelques commentaires

1.3.4.1 Comparaisons des schémas Taylor Galerkin et de la méthode Galerkin Standard

[Donea 1984] compare ses trois nouveaux schémas (ETG, LFTG et CNTG) à l'approche Galerkin standard, à partir de l'équation scalaire 1D de convection, déjà présentée (§ 1.3.3.2), puis élargie au problème à coefficient variable (1.108) :

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x} (a(x)u) = 0 \quad (1.108)$$

Par exemple, partant du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{1+2x} \right) = 0 \quad x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = 0 \\ u(x, 0) = (1+2x) \sin(9x) \quad \text{si } x \in [0, \pi/3] \\ \quad \quad \quad = 0 \quad \text{si } x \in [\pi/3, \pi] \end{array} \right. \quad (1.109)$$

si $0 \leq x^2 + x - t \leq [\pi/3(1 + \pi/3)]$, la solution analytique vaut :

$$u(x, t) = (1+2x) \sin 9 \left[\left(x^2 + x - t + \frac{1}{4} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \right] \quad (1.110)$$

et zéro ailleurs.

Avec cette solution exacte représentée sur la figure 1.13 en pointillés, on peut comparer les schémas ETG et CNTG respectivement au schéma différences finies Lax-Wendroff et au schéma conventionnel éléments finis Galerkin-Crank-Nicholson, tous en traits pleins. Il en découle d'excellents résultats pour le schéma ETG avec une réduction considérable de la phase d'erreur.

\Rightarrow Dans tous les cas, ces trois schémas basés sur la méthode de Taylor Galerkin ont de meilleures propriétés de stabilité et particulièrement une grande phase de précision avec de minimales amortissements numériques. D'autre part, c'est le schéma Taylor Galerkin explicite qui est le plus souvent sollicité, avec une stabilité obtenue même avec un développement de Taylor de faible degré.

1.3.4.2 Avantages et inconvénients des méthodes stabilisées

Pour des problèmes de convection/diffusion à convection dominante, ces méthodes ont de bonnes propriétés de stabilité [Codina 1998] et permettent alors de s'affranchir des difficultés rencontrées lors d'approches Galerkin standards.

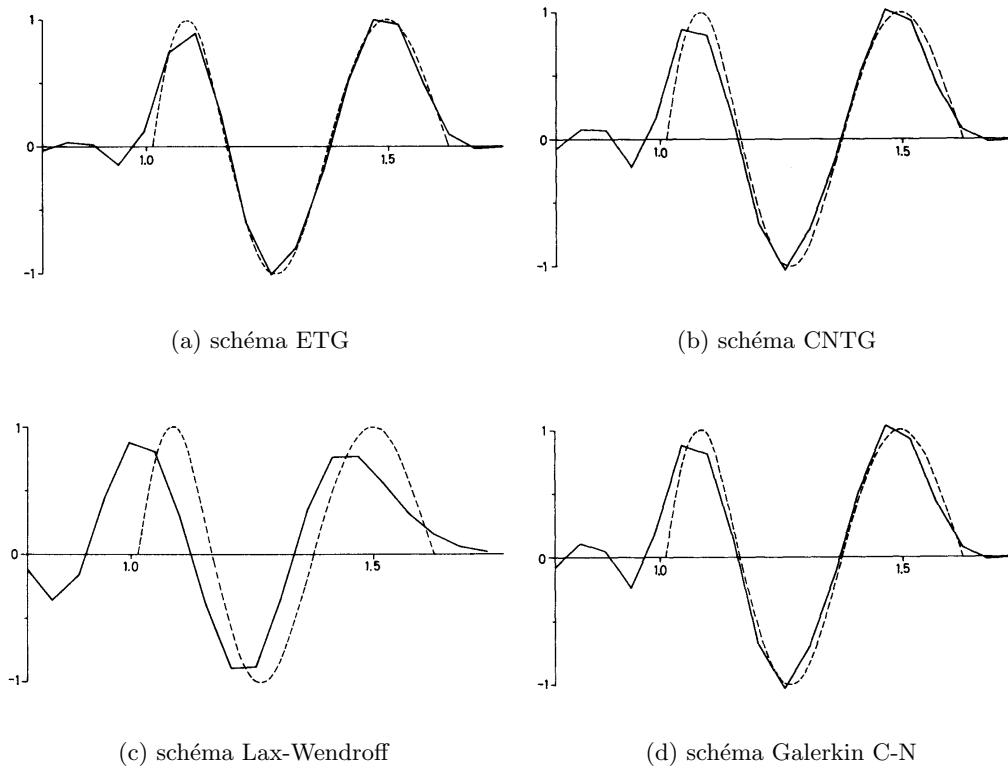


FIG. 1.13 – Solutions numériques (traits pleins) en fonction de la solution exacte (pointillés) de l'équation (1.109) [Donea 1984].

La technique SUPG est l'une des plus utilisées parmi les méthodes de stabilisation. Elle donne en général de bons résultats même avec une équation purement convective ($\nu = 0$).

Malgré tout, elles ne sont pas toujours les mieux appropriées du fait même de leur formulation :

- Elles conduisent généralement à la résolution de systèmes linéaires à matrice non symétrique. D'où la nécessité de les associer à des algorithmes de résolution itératifs qui sont coûteux en temps de calculs.
- Associées aux schémas temporels implicites, cela conduit à résoudre de très gros systèmes.
- Elles peuvent occasionner des problèmes de consistance de la solution obtenue : la superposition du terme source aux termes de convection/diffusion peut dénaturer la solution même avec le rajout d'un terme de stabilisation.

Par contre, la méthode Taylor Galerkin qui peut-être vue comme une méthode stabilisante, est capable de construire des schémas numériques d'une grande précision pour des problèmes purement convectifs mais aussi pour des situations plus complexes de convection/diffusion. L'efficacité de cette méthode est incontestablement due à l'utilisation du développement de Taylor explicite qui se contente de faire intervenir des dérivées secondes et troisièmes, assurant ainsi la stabilité du schéma. Du coup, cette méthode est facilement implémentable dans n'importe quel code de calculs EF. Contrairement à la formulation Petrov-Galerkin en résidus pondérés, la méthode TG n'a pas besoin d'utiliser des fonctions de pondération particulières et encore moins de déterminer des paramètres pour optimiser la précision.

Après avoir présenté les méthodes stabilisées les plus utilisées dans la littérature, nous nous penchons maintenant sur la technique de Galerkin discontinue, tout aussi intéressante, qui ne présente l'ajout d'aucun terme de stabilisation.

1.3.5 La méthode Galerkin Discontinue (GD)

Elle a été introduite par [Lesaint-Raviart 1974] pour des problèmes hyperboliques du premier ordre et par [Jamet 1978] pour des problèmes paraboliques. Très peu d'auteurs se sont penchés sur le traitement du terme de diffusion [Oden et al. 1998, Baumann-Oden 1999]. Depuis quelques années, la méthode de Galerkin Discontinue a été appliquée avec succès sur des problèmes paraboliques [Jamet 1978, Thomée 1997] et hyperboliques du premier ordre [Lesaint-Raviart 1974]. Elle présente un grand intérêt dans la résolution approchée des problèmes de fluides viscoélastiques [Baranger-Sandri 1996].

Cette technique consiste de façon générale à interpoler les inconnues du problème par des fonctions polynômiales pour lesquelles aucune condition de continuité n'est exigée aux interfaces entre les éléments.

Deux grandes familles de discrétisation en ressortent à travers de nombreuses publications :

- * un modèle spatial discontinu,
- * et un modèle spatio-temporel discontinu.

1.3.5.1 Modèle spatial discontinu

a) Applications diverses

S'inspirant de l'idée de base de cette technique, chaque auteur l'interprète à sa manière en l'appliquant sur des problèmes divers avec des approximations variées :

- Pour appliquer la méthode de Galerkin Discontinue sur une **équation de convection/diffusion en 1D**, certains utilisent l'approximation polynômiale de u sur chaque élément Ω_e :

$$\tilde{u} = \sum_{k=0}^{p_e} u_k^e N_k^e(x)$$

avec des fonctions d'interpolation N_k^e qui sont des monômes x^k de degré k . Il est intéressant de savoir que ces fonctions peuvent également être soit des polynômes N_e de degré inférieur ou égal à p_e , soit des polynômes orthogonaux [Biswas et al. 1994] et, d'autre part, qu'on n'est pas obligé de prendre le même degré polynômial sur chaque élément de la triangulation Ω_e .

- [Baranger-Sandri 1996] reprennent la méthode GD introduite par [Lesaint-Raviart 1974] en vue d'étudier **l'équation de convection** de type (1.111), équation présentant un grand intérêt dans la résolution approchée des problèmes de fluides viscoélastiques.

$$\begin{cases} (u \cdot \nabla) \sigma + a \sigma = f \\ \sigma = g \quad \text{sur } \Gamma^- = \{x \in \Gamma, \vec{n} \cdot u(x) < 0\} \end{cases} \quad (1.111)$$

L'approximation de cette équation va se faire en introduisant l'espace des **polynômes** $P_k(K)$ de deux variables de degré au plus k , sur l'élément K de la triangulation. La méthode GD consiste alors à approcher l'inconnue σ par :

$$\sigma_h \in V_h = \left\{ \tau \in L^2(\Omega); \tau|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \Omega_h \right\}$$

solution de " $\exists \sigma_h \in V_h$ tel que $B(u, \sigma_h, \tau) = (f, \tau) \quad \forall \tau \in V_h$ "

$$\text{avec } B(v, \sigma, \tau) = \sum_{K \in \Omega_h} \left((v \cdot \nabla) \sigma + a \sigma \right) \tau + \sum_{K \in \Omega_h} \int_{\partial K_v^-} (\sigma_v^+ - \sigma_v^-) \tau_v^+ |n \cdot v| ds \quad (1.112)$$

Cette méthode fournit des estimations d'erreur en $h^{k+1/2}$. L'analyse de cette méthode donne des résultats d'existence et de convergence de la solution approchée tandis que les résultats d'unicité s'obtiennent en déduisant la continuité du terme frontière (deuxième terme du membre de droite de (1.112)).

- [Biswas et al. 1994] construisent une méthode éléments finis pour la solution de la **loi de conservation hyperbolique en 1 D et 2 D** (1.113). Pour la discrétisation spatiale, ils utilisent une base de **polynômes de Legendre** par morceaux approchant la solution; ces polynômes étant continus sur chaque élément mais pouvant être discontinus aux frontières inter-élément. La discrétisation temporelle est basée sur la méthode Runge-Kutta [Cockburn et al. 2000].

$$u_t + \sum_{i=1}^d f_i(u)_{x_i} \quad \text{ou } d = 1, 2. \quad (1.113)$$

- D'autres auteurs préfèrent étudier les problèmes de diffusion [Oden et al. 1998], logiquement étendus à ceux de **convection/diffusion** [Baumann-Oden 1999] :

Leur méthode est basée sur une approximation classique GD du terme de convection. Pour le terme de diffusion, leur modèle permet d'imposer faiblement des continuités sur les frontières inter-élément, entraînant ainsi une discontinuité du champ solution et du flux à travers ces interfaces. Ils optent aussi pour une interpolation polynômiale de degré inférieur ou égal à p .

Ils considèrent un problème du second ordre de convection/diffusion caractérisé par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A \nabla u) + \nabla \cdot (\beta u) + \sigma u = S & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u = f & \text{sur } \Gamma_D \\ (A \nabla u) \cdot n = g & \text{sur } \Gamma_D \end{cases} \quad (1.114)$$

où $\beta \in (L^\infty(\Omega))^d$ est le vecteur flux qui peut avoir des discontinuités de contact, $\sigma \in L^\infty(\Omega)$, $\sigma > 0$ dans Ω et $A \in (L^\infty(\Omega))^{d \times d}$ est la matrice de diffusivité.

La frontière Γ est composée de deux parties disjointes Γ_D sur laquelle des conditions de Dirichlet sont imposées et Γ_N sur laquelle des conditions de Neumann sont imposées (figure 1.14).

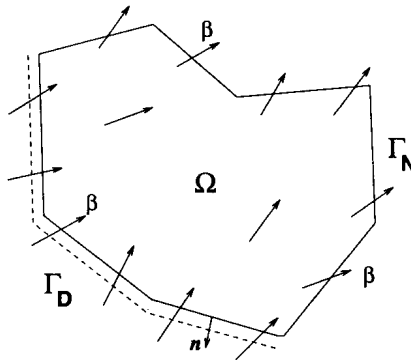


FIG. 1.14 – Cinématique du problème : domaine et frontières [Baumann-Oden 1999].

Une hypothèse est également faite concernant le flux entrant sur la frontière Γ^- :

$$\Gamma_D \supseteq \Gamma^- = \left\{ x \in \Gamma \text{ tq } \beta \cdot n(x) < 0 \right\}$$

Une formulation consistante du problème (1.114) est donnée par son développement variationnel :

$$\text{Trouver } u \in W(\Omega_h) \text{ tel que } B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in W(\Omega_h) \quad (1.115)$$

Cette formulation est globalement et localement conservative. L'existence de la solution de (1.115) peut-être établie par le théorème classique de Lax-Milgram généralisé [Aziz-Babuška 1972].

La stabilité de la solution est l'une des caractéristiques les plus importantes de la méthode GD pour la solution des problèmes de convection/diffusion.

Remarque 1.15 *Pour plus de détails concernant l'obtention de $B(u, v)$ et $L(v)$, le lecteur pourra se référer aux travaux de [Baumann-Oden 1999].*

Les problèmes de transport convection/diffusion présentent habituellement de violentes variations quand on passe de zones à diffusion dominante vers des zones à convection dominante. Pour les problèmes à diffusion dominante, l'erreur est mieux mesurée en norme H^1 puisque les lois physiques associées dépendent du gradient solution (comme le transfert de chaleur, la contrainte visqueuse) tandis que pour le transport à convection dominante, l'erreur est mieux mesurée en norme L^2 (avec des variables physiques fondamentales dépendant quasi-exclusivement des valeurs de la solution plutôt que de celles de son gradient).

b) Comparaison entre méthode Galerkin continue (GC) et discontinue (GD)

L'étude faite par [Baumann-Oden 1999] est très intéressante puisque ces auteurs ne se contentent pas de détailler le modèle GD (ainsi que ses propriétés) sur un problème général de convection/diffusion mais dressent également une étude comparative entre la méthode Galerkin continue et le modèle discontinu sur plusieurs problèmes de convection/diffusion.

Deux problèmes scalaires de convection/diffusion sont présentés ici : le premier est singulièrement perturbé tandis que le second possède un point décisif.

- Le domaine étant partitionné en 10 éléments (avec une taille de maille $h = 1/10$), on considère un problème de convection/diffusion singulièrement perturbé avec $\alpha = \frac{h}{P_e}$ ($\alpha = 10^{-3}$) et $S = \{0, 1\}$:

$$\begin{cases} -\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = S & \text{sur } [0, 1] \\ u(0) = 1 & \text{et } u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.116)$$

La solution exacte est donnée par $u(x) = \{1, x\} - \frac{\exp(\frac{x}{\alpha}) - 1}{\exp(\frac{1}{\alpha}) - 1}$.

Les figures 1.15(a) et 1.15(b) montrent les solutions numériques obtenues à l'aide de la méthode GC et la méthode GD en faisant varier le degré de l'interpolation polynômiale p . On remarque que les oscillations de la méthode GC polluent le domaine tout entier alors que la méthode GD

présente seulement de petites oscillations sur les éléments les plus à droite sans polluer le reste du domaine. Ceci est très important pour les stratégies adaptatives (adaptation du maillage) parce que les indicateurs d'erreur pour la technique GD sont très simples et précis (en l'absence de solution oscillante).

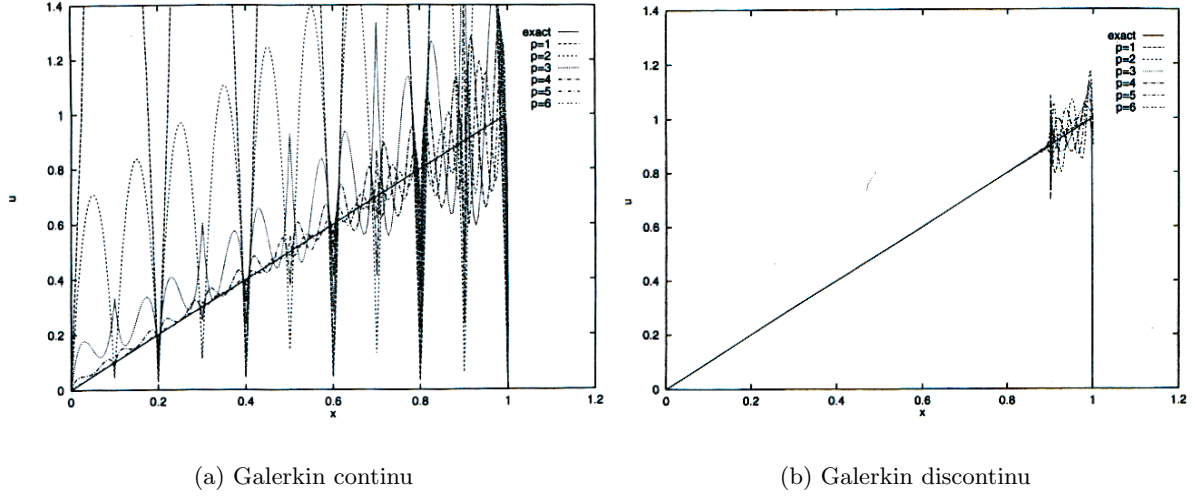


FIG. 1.15 – *Comparaison avec $S = 1$ et $P_e = 100$ [Baumann-Oden 1999].*

• Considérons maintenant la solution du problème de convection/diffusion avec un point décisif dans le milieu du domaine. Le problème dit de Hemker est donné par :

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha \pi^2 \cos(\pi x) - \pi x \sin(\pi x) & \text{sur } [0,1] \\ u(-1) = -2 & \text{et } u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.117)$$

La solution exacte est donnée par $u(x) = \cos(\pi x) + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}\right) * \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right)^{-1}$.

En prenant $\alpha = 10^{-10}$ et $h = 1/10$ et en faisant varier le degré de l'interpolation polynômiale p , les figures 1.16(a) et 1.16(b) montrent les solutions numériques du problème obtenues respectivement par une méthode GC et une méthode GD.

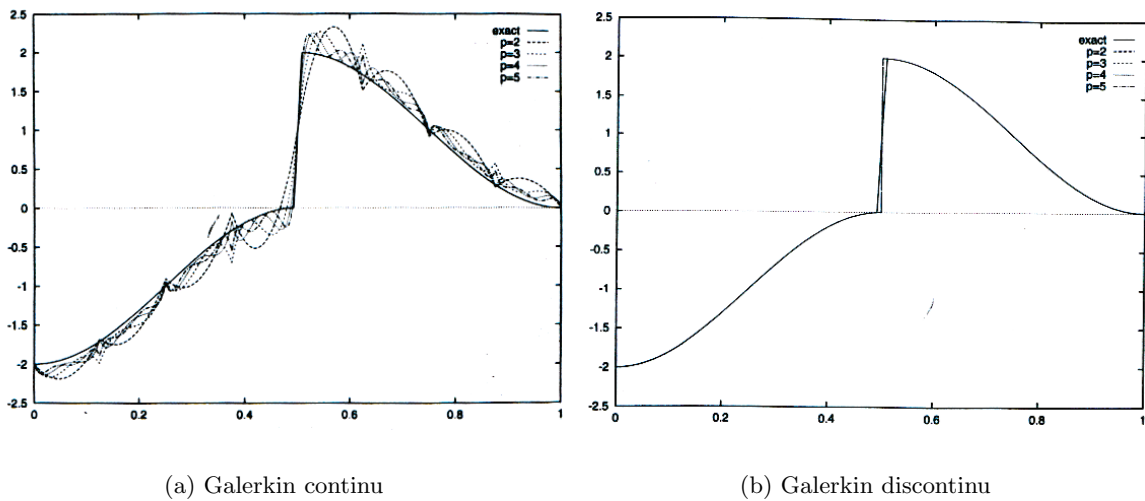


FIG. 1.16 – *Problème dit de Hemker avec $\alpha = 10^{-10}$ et $h = 1/10$ [Baumann-Oden 1999].*

Ces résultats montrent que la solution exacte est mieux représentée en utilisant des fonctions discontinues dont les oscillations disparaissent; autrement dit, la méthode GD s'applique mieux que la méthode GC pour ce type de problème.

⇒ L'étude de la stabilité et les tests numériques montrent qualitativement la supériorité des solutions discontinues sur les solutions Galerkin continues pour ces problèmes. En comparaison à d'autres techniques qui utilisent de la diffusion artificielle pour améliorer la stabilité des approximations Galerkin continues, la méthode GD n'introduit pas de termes dépendant de la taille de maille dans les équations gouvernantes.

Remarque 1.16 *L'évaluation du taux de convergence est aussi envisagé pour le problème de convection/diffusion suivant :*

$$\begin{cases} -\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha (4\pi)^2 \sin(4\pi x) + 4\pi \cos(4\pi x) & \text{sur } [0,1] \\ u(x) = 0 & \text{pour } x = 0 \text{ et } x = 1 \\ \text{Solution exacte : } u_{ex}(x) = \sin(4\pi x) \end{cases} \quad (1.118)$$

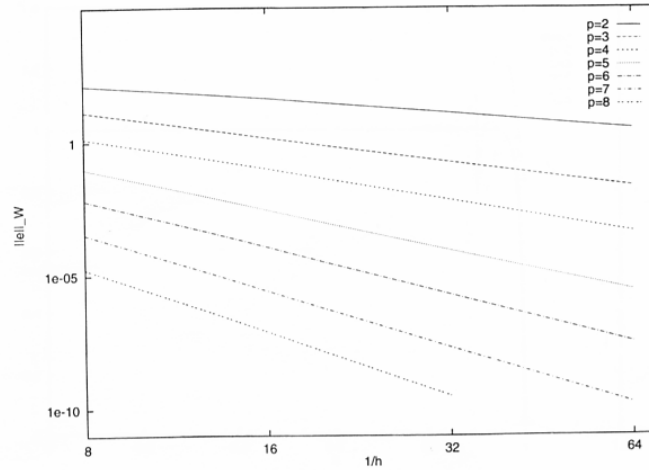


FIG. 1.17 – Taux de h -convergence pour $\alpha = 10^2$ [Baumann-Oden 1999].

Le taux de h -convergence (Convergence Ratio) est établi par :

$$CR_h = \frac{\log(e_{2h}/e_h)}{\log(2)} \quad \text{avec } e_h = \|u_h - u_{ex}\|_{W_j} \quad (1.119)$$

La figure 1.17 montre le taux de h -convergence obtenu pour des maillages uniformes avec $\alpha = 10^2$. Le taux de convergence asymptotique avec la norme H^1 est de l'ordre de $\mathcal{O}(h^p)$. Par contre, pour $\alpha = 10^{-2}$, l'erreur est mesurée en norme L^2 avec un taux de convergence de l'ordre de $\mathcal{O}(h^{p+1})$.

c) Quelques propriétés de la méthode

Diverses propriétés de la méthode GD ressortent. On a pu voir qu'elle pouvait facilement s'adapter pour le calcul parallèle.

Des propriétés de continuité et de dérivabilité par rapport au champ de convection sont déduites du terme frontière de la méthode de [Baranger-Sandri 1996]; propriétés notamment applicables au problème d'unicité dans l'approximation des fluides visqueux.

Des estimations d'erreurs spatiales *à posteriori* sont obtenues par une technique de h et/ou p-raffinement [Biswas et al. 1994] indiquant où le maillage devrait être raffiné et/ou où le degré de l'interpolation polynômiale devrait être ajusté pour enrichir la solution numérique. L'utilisation de p-raffinement (augmentation du degré d'interpolation des fonctions d'interpolation [Zienkiewicz-Taylor 1989]) et h-raffinement (diminution de la taille de maille là où les phénomènes ne sont pas correctement capturés c'est à dire là où la marge d'erreur est trop importante [Zienkiewicz-Taylor 1989]) adaptatifs permettent de réduire le coût de calcul de la méthode; entraînant ainsi l'efficacité et la viabilité de la méthode. [Biswas et al. 1994] envisagent même de combiner ces deux techniques d'adaptation en hp-technique afin d'encore mieux optimiser le temps de calculs aussi bien dans les régions où la solution est lissée que discontinue.

La méthode de [Oden et al. 1998] s'appuie sur des h,p et hp-approximations (combinaison des h et p-approximations: on adapte à la fois la taille de maille et le degré d'interpolation; l'estimation de l'erreur se fait avec des majorations exponentielles) et peut être appliquée sur n'importe quel type de maillage. Une estimation d'erreur *à priori* et des expériences numériques sur ces problèmes indiquent que la méthode est robuste, d'une grande précision et capable de donner des taux de convergence exponentielles ainsi que des approximations conservatives.

1.3.5.2 Modèle spatio-temporel discontinu

Cette méthode spatio-temporelle discontinue a récemment été développée pour résoudre les problèmes d'évolution. Nous l'avons déjà introduite au paragraphe 1.3.2.2 lors de la présentation de la méthode ST/GLS, basée entre autre sur cette approche.

L'idée est d'utiliser une formulation éléments finis pour discrétiser dans le domaine temporel et permettre aux champs inconnus d'être discontinus au niveau du temps discrétisé [Thomée 1997] [Cockburn et al. 2000, Hughes et al. 1989, Werder et al. 2001].

a) Rappels bibliographiques sur les éléments finis espace/temps

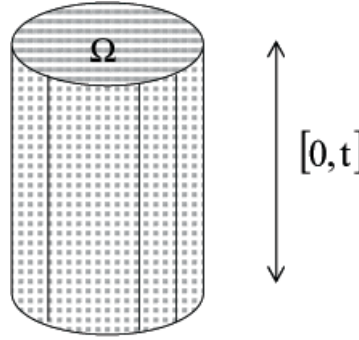
Généralement, les discrétisations en espace et en temps sont découplées pour résoudre numériquement des problèmes mathématiques ayant pour inconnue une grandeur A dépendant de sa position (x) et du temps (t).

L'idée de la méthode des éléments finis espace/temps est de résoudre **simultanément** les problèmes en espace et en temps. Par conséquent, la variable temps t sera considérée au même titre que les variables d'espace x . Il s'agit alors de rajouter une dimension supplémentaire au problème qui serait vu comme un problème spatial seul. Dans ces conditions, on introduit une nouvelle variable **position-espace** $\tilde{x} = (x, t)$ avec $\tilde{x} \in \Omega_{st} = \Omega \times [0, t]$, Ω_{st} étant le domaine espace/temps (figure 1.18).

Par exemple, si nous considérons le problème thermique réduit uniquement au transport d'un front thermique, ce dernier va s'écrire sous la forme :

Trouver $T(x, t)$ tq $\forall (x, t) \in \Omega \times [0, t]$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, t[\\ T(x, 0) = T_0(x) & \text{sur } \Omega \times \{0\} \\ T(x, t) = g(x, t) & \text{sur } \partial\Omega^- \times]0, t[\\ \partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega, \vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) < 0\} \end{array} \right. \quad (1.120)$$

FIG. 1.18 – *Domaine espace-temps* $\Omega_{st} = \Omega \times [0, t]$.

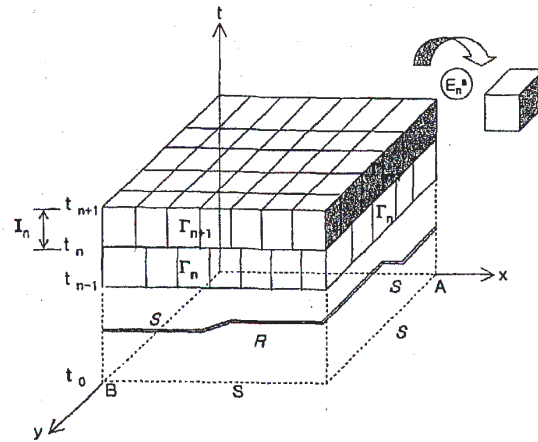
Ce qui revient à négliger les phénomènes de diffusion et de dissipation de l'équation de la chaleur (1.4), avec $k = 0$ et $\dot{w} \simeq 0$.

L'introduction de l'opérateur "position-espace" $\vec{\nabla} = \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial t} \right)$ permet de réécrire le système (1.120) en posant $\vec{\check{v}} = (\vec{v}, 1)$, c'est à dire :

Trouver $T(\check{x})$ tq $\forall \check{x} \in \Omega_{st}$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\check{v}} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T + \frac{\partial T}{\partial t} = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, t[\\ T(\check{x}) = \tilde{g}(\check{x}) & \text{sur } \partial(\Omega \times]0, t[)^- \\ \partial(\Omega \times]0, t[)^- = \{ \check{x} \in \partial(\Omega \times]0, t[), \vec{\check{v}}(\check{x}) \cdot \vec{n}(\check{x}) < 0 \} \end{array} \right. \quad (1.121)$$

Remarque 1.17 Le problème (1.121) est analogue au problème de convection pure instationnaire $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = 0$, auquel on a rajouté une dimension supplémentaire. Sous cette forme, les techniques classiques de discrétisation par éléments finis peuvent s'appliquer pour déterminer le champ inconnu $T(\check{x})$ sur Ω_{st} . Bien évidemment, l'utilisation d'une résolution de type éléments finis impose dans un premier temps de construire un maillage du domaine spatio-temporel Ω_{st} (figure 1.19).

FIG. 1.19 – *Maillage composé d'éléments spatio-temporels* K^i en 2D [Kim 2001].

Remarque 1.18 *Interpolation discontinue en temps.*

Le choix d'une interpolation discontinue en temps conduit de façon avantageuse à la résolution par balayage en temps d'un problème écrit sur une tranche $\Omega \times]t_i, t_{i+1}[$.

En revanche, le choix d'une interpolation continue en temps se traduit par une résolution globale du problème sur l'ensemble du domaine spatio-temporel $\Omega \times]0, t[$. Si l'on bénéficie d'une résolution regroupant en une seule étape le problème en espace et le problème en temps, cette méthode nécessite pourtant de résoudre de très gros systèmes. Il est alors nécessaire, au risque de la rendre inefficace, de l'associer à des techniques de résolution et de stockage bien appropriées.

En raison de ses avantages, la méthode de découplage des approximations en temps et en espace (dans une véritable formulation éléments finis spatio-temporelle) associée à une interpolation discontinue en temps a été reprise par de nombreux auteurs [Kim 2001].

b) Domaines d'application

Comme pour le cas spatial, l'utilisation du modèle spatio-temporel discontinu est très diverse.

- Elle est, par exemple, bien adaptée pour résoudre les problèmes de structure dynamique [Li-Wiberg 1996] de forme générale $M \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + K u(t) = F(t)$ avec une approximation P_1/P_1 en déplacement/vitesse (offrant de bonnes propriétés de stabilité et de convergence) et pour les problèmes viscoélastiques (modèle de Malvern) [Idesman 2000].

- Quelques auteurs s'intéressent à des problèmes plus généraux comme les problèmes paraboliques [Thomée 1997], le problème scalaire de convection/diffusion/réaction [Freund 2001] mais aussi aux propriétés de stabilité rencontrées lors de l'étude de l'équation de la chaleur sous sa forme classique [Makridakis-Babuška 1997] et sous sa forme "forward-backward" [French 1998].

- Pour résoudre l'équation de transport (1.120), [Batkam 2002] utilise un schéma de discrétisation spatio-temporelle dont les particularités sont :

- Pour la discrétisation spatiale, la température est interpolée par des fonctions discontinues
- Pour l'intégration temporelle, utilisation d'une interpolation constante P_0 par tranche temporelle $]t_i, t_{i+1}[$ (c'est le modèle le plus simple pour des fonctions discontinues).

De plus, pour la construction de ce schéma temporel, [Batkam 2002] s'appuie sur une technique de maillage structuré en temps (c'est à dire que la base temporelle est orthogonale au domaine spatial) avec une interpolation discontinue en temps des champs inconnus.

* Maillage structuré en temps

L'intervalle de temps $]0, t[$ se compose de la réunion des intervalles $]t_i, t_{i+1}[$ pour $i \in [0, N - 1]$. Ω_h^{st} est une discrétisation du domaine $\Omega^{st} = \Omega \times]0, t[$ en éléments spatio-temporels K^i qui sont tous des prismes (figure 1.20), avec $K^i = K \times]t_i, t_{i+1}[$ et :

$$\Omega_h^{st} = \bigcup_{K \in \Omega_h} K^i = \bigcup_{K \in \Omega_h} K \times]t_i, t_{i+1}[\quad \forall i \in [0, N - 1]. \quad (1.122)$$

* Interpolation P_0 en espace/temps

L'auteur choisit d'interpoler l'inconnue T par des fonctions discontinues, constantes par élément

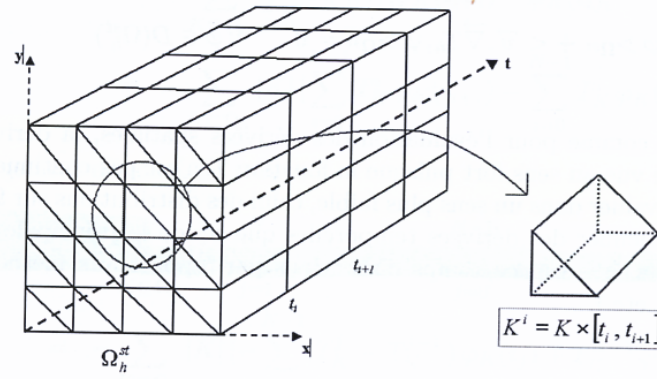


FIG. 1.20 – Maillage Ω_{st} composé d'éléments spatio-temporels K^i en 2D [Batkam 2002].

spatio-temporel K^i . Ce choix recouvre en fait deux approximations:

- une interpolation constante par rapport aux variables d'espace x : $T \in P_0(K)$,
- une interpolation discontinue constante par rapport au temps t : $T \in P_0([t_i, t_{i+1}])$.

Remarque 1.19 Avec ce modèle, la dérivée $\frac{\partial T}{\partial t}$ sera évaluée comme une dérivée spatiale.

Comme $\frac{\partial T}{\partial t}$ n'est pas continue sur $]0, t[$, elle sera donc évaluée dans un sens plus faible, celui des distributions sur Ω_{st} (1.123). La principale originalité de l'approche par éléments finis espace/temps discontinus réside tout particulièrement dans le traitement du terme de dérivation.

$$\frac{\partial T_h}{\partial t} \Big|_{K \times]t_i, t_{i+1}[} = |K| (T_K^i - T_K^{i-1}) \quad \text{où} \quad T_K^i = T_h|_{K^i}. \quad (1.123)$$

* Bilan de discrétisation de l'équation de transport (1.120)

Etant donné T_K^{i-1} , trouver T_K^i tel que pour tout $K^i \in \Omega_h^{st}$, le système suivant soit vérifié :

$$|K| (T_K^i - T_K^{i-1}) - (t_{i+1} - t_i) \sum_{F \in \partial K} (T_K^i - T_{K(F)}^i) \int_F (\vec{v} \cdot \vec{n})^- ds = 0 \quad (1.124)$$

Remarque 1.20 L'interpolation P_0 en temps peut être enrichie avec ordre d'interpolation temporelle plus élevé, qui conduit à une solution locale plus précise [Batkam 2002].

- [Freund 2001] explique comment combiner les caractéristiques des formulations continues et discontinues pour éviter une augmentation excessive de la taille du problème discrétisé. L'approximation est choisie discontinue uniquement sur la partie de l'interface de l'élément où les éléments de tailles différentes se rencontrent ou sur laquelle la continuité est difficile à satisfaire pour d'autres raisons.

- D'autres optent pour des versions hp-GD [Werder et al. 2001] (obtenue à partir d'une hp-discrétisation spatiale continue), pour des adaptations de maillage [Idesman 2000] (h-raffinement) ou du "time-stepping" [Li-Wiberg 1996] (une procédure adaptative time-stepping est développée pour sélectionner la taille appropriée du pas de temps en utilisant les sauts de déplacement/vitesse dans la norme totale d'énergie), sans oublier ceux qui postulent pour une version parallèle [Idesman 2000].

c) Etude comparative

En comparant la méthode GD proposée dans [Li-Wiberg 1996] à la solution analytique, il en ressort qu'elle est bien adaptée pour son type de problèmes (à structure dynamique) sachant qu'elle filtre les effets des modes parasites.

En comparant sur des exemples numériques la méthode GD développée par [Idesman 2000] à l'approche Galerkin continue, il apparaît qu'elles sont toutes les deux recommandées pour les problèmes viscoélastiques avec des conditions initiales et aux limites régulières mais, en général, la version discontinue est plus flexible et s'avère préférable pour les problèmes ayant des conditions initiales et aux limites discontinues ou pour des solutions présentant de larges gradients.

d) Propriété de stabilité

La méthode temporelle éléments finis Galerkin possède une bonne précision (3^e ordre) et des propriétés de stabilité [Li-Wiberg 1996]; son implémentation numérique n'est pas difficile et les plus hauts coûts de calculs sont compensés par l'utilisation de grands pas de temps. [French 1998] et [Makridakis-Babuška 1997] s'orientent vers deux espaces d'approximation X_h^p (espace de polynômes de degré $\leq p$ continus par morceaux sur la grille spatiale et s'annulant aux extrémités de cette grille) et D_k^q (espace de polynômes de degré $\leq q$ continus par morceaux sur la grille temporelle et pouvant être discontinus à $t = t_i$).

[Makridakis-Babuška 1997] montrent que la projection éléments finis associée à leur méthode est stable vis-à-vis d'une norme dépendant du maillage (norme discrète analogue à celle de L^2 en espace-temps) et en déduisent une erreur optimale bornée dans $L^2([0, t]; L^2(\Omega))$ pour $p > 1$ et $q > 1$. En fait, ces résultats sont basés sur leur nouvelle condition inf-sup de Brezzi-Babuška qui doit se vérifier avec leur norme et leur espace d'approximation.

Quant à [French 1998], il développe deux estimations sur la précision de leur schéma (pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$ et pour $p \geq 1$ et $q = 0$), en supposant la solution du problème suffisamment régulière. Cependant il remarque la chose suivante: *si on prend $p = q$ et $h = k$ dans $\|(u - U)_x\|_\Omega^2 + D(u - U)^2 \leq C(k + h^{p+1}) \forall q = 0$ (comme il serait naturel pour l'interpolation), la norme L^2 des dérivées spatiales est bornée par $\mathcal{O}(h^p)$ qui est optimal.*

1.3.5.3 Conclusion

Au cours des expériences numériques, il apparaît que la méthode Galerkin Discontinue est plus fiable que la formulation Galerkin standard et même que la méthode SUPG, en construisant des schémas stables, d'une grande précision et faciles à implémenter. De plus, elle s'étend dans de vastes domaines comme les problèmes de convection/diffusion, les problèmes viscoélastiques, les problèmes dynamiques, paraboliques, hyperboliques, avec à l'appui deux grandes techniques (une discrétisation spatiale ou une discrétisation espace-temps simultanée).

Son originalité vient du fait qu'elle peut être combinée à des techniques de raffinement ou d'adaptation du maillage (h, p et hp) et être élargie à une version parallèle.

1.4 Conclusions

Dans ce premier chapitre, nous avons vu comment modéliser classiquement le problème thermique instationnaire, avec la température comme inconnue.

Nous nous sommes intéressés à la résolution numérique de ce problème thermique en détaillant l'approche la plus connue et la plus utilisée, **la méthode Galerkin standard** munie d'éléments finis linéaires P_1 . Cette dernière rencontre cependant des difficultés pour traiter les chocs thermiques et génère des instabilités pour des problèmes fortement convectifs.

Une possibilité consiste alors à lui associer **la thermique asynchrone** afin de "lisser" le choc thermique et d'obtenir un champ de température acceptable. Cette méthode de thermique asynchrone utilise en fait un pas de temps suffisamment grand, de manière à ce que la diffusion créée atteigne la seconde couche de noeuds sous la surface et évite ainsi les oscillations spatiales. Elle donne des résultats satisfaisants pour des problèmes linéaires ou faiblement non linéaires, mais aussi au cours de la simulation des procédés de trempe de pièces forgées. Néanmoins cette technique reste intéressante tant que le choc n'est pas trop violent.

Pour résoudre efficacement des problèmes linéaires ou faiblement non linéaires, **la méthode de diffusion partitionnée** est recommandée. En l'occurrence, pour ce type de problème, cette technique peut être assimilée à l'approche Galerkin standard combinée à la thermique asynchrone. Par contre, contrairement à la thermique asynchrone, elle présente un grand intérêt pour résoudre les problèmes fortement non linéaires, avec changement de phase comme lors du processus de solidification : elle se révèle très performante et beaucoup plus robuste. Toutefois, même si elle s'intègre facilement dans n'importe quel code de calculs, il ne semble pas nécessaire d'envisager cette technique de résolution pour notre étude qui, en l'occurrence, concerne des problèmes faiblement non linéaires (processus de forgeage à chaud et à froid).

Par la suite, nous avons étendu la recherche bibliographique en évoquant diverses techniques de résolution pour des problèmes plus généraux de convection/diffusion, afin de trouver dans la littérature une méthode plus adaptée à la résolution de notre problème thermique, dans le cas des procédés de la mise en forme des métaux.

Il s'avère que les **méthodes stabilisées** permettent de s'affranchir des difficultés rencontrées par les approches Galerkin standard pour le traitement des problèmes de convection/diffusion. Nous avons vu que ces méthodes consistaient à rajouter un terme de stabilisation s'apparentant à une diffusion artificielle dans la formulation faible du schéma Galerkin standard. Lorsque le terme de convection est prépondérant, ces méthodes ont de bonnes propriétés de stabilité. Cependant, elles aboutissent à des systèmes linéaires non symétriques et peuvent poser des problèmes de consistance.

La **méthode de Taylor Galerkin**, qui peut-être vue comme une des méthodes stabilisées, donne des schémas d'une grande précision avec de bonnes propriétés de stabilité, et qui plus est, elle est facile à implémenter.

Une méthode plus connue est la **méthode de Galerkin Discontinue**. Dans une gamme très large de problèmes, la méthode Galerkin Discontinue, facilement programmable, offre de bonnes propriétés de stabilité et de robustesse (généralement combinée à des adaptations et/ou raffinements de maillages). Elle permet également de répondre efficacement aux problèmes d'oscillations rencontrés par la méthode standard pour le traitement de forts gradients thermiques. De plus, elle s'adapte aux calculs parallèles sans trop de difficultés.

Bien que nous puissions retenir **la méthode des volumes finis** en nous limitant à l'utilisation d'un code de calcul 3D éléments finis pour la simulation du procédé de forgeage à chaud, nous ne pouvions finir ce premier chapitre sans l'évoquer. En effet, cette technique est couramment employée pour résoudre les problèmes thermiques. [Mohan-Tamma 1994] s'intéressent aux problèmes thermiques non linéaires transitoires en combinant les deux approches éléments finis/volumes finis par une stratégie d'adaptation du pas de temps en vue de conserver les critères de stabilité et de précision du schéma d'intégration temporelle.

De ce travail, il en ressort que les méthodes de Taylor Galerkin et de Galerkin Discontinue sont les plus intéressantes pour résoudre notre type de problème thermique instationnaire. D'ailleurs, [Pichelin-Coupez 1999] les ont associées, pour la résolution de problèmes mixtes. Cette technique fera entre autre l'objet du chapitre suivant. En effet, le deuxième chapitre sera consacré à la résolution des problèmes thermiques instationnaires en considérant, cette fois, une formulation mixte, qui aura la particularité de s'affranchir des limitations des méthodes stabilisées. Nous verrons qu'en introduisant ces méthodes mixtes, elles ont l'avantage de résoudre les problèmes d'instabilités causées par des approches Galerkin standards sans introduire un quelconque terme stabilisant.

Chapitre 2

Modélisation et résolution du problème thermique mixte instationnaire

D'un point de vue général, les méthodes mixtes sont basées sur une formulation à deux ou plusieurs champs du problème à résoudre. Elles ont d'abord été introduites pour résoudre le problème de Stokes [Brezzi-Fortin 1991, Ern-Germond 2000] et leur théorie est aujourd'hui largement diffusée dans ce domaine.

Par contre, à notre connaissance, peu de travaux existent à ce jour concernant les problèmes de convection/diffusion. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous introduisons la formulation mixte à deux champs (la température T et le flux de chaleur \vec{q}) du problème thermique instationnaire. Nous verrons que cette formulation est mieux adaptée pour résoudre ce type de problème.

L'objectif de ce manuscrit étant d'améliorer la précision de la résolution du modèle thermique lié au forgeage en développant une technique plus fiable que l'approche Galerkin standard combinée à la thermique asynchrone, nous reprenons ici deux modèles utilisant la méthode de Galerkin Discontinu, introduite par [Lesaint-Raviart 1974] et présentée au chapitre 1 (§ 1.3.5). Développés dans le cadre de la résolution de l'équation de la chaleur instationnaire, il s'agit du schéma de Taylor Galerkin Discontinu et du modèle Galerkin Discontinu Implicite.

- **Le schéma de Taylor Galerkin Discontinu explicite** a été développé par [Pichelin 1998] pour traiter efficacement le problème thermique en injection des polymères. Il a par la suite été implanté et validé par [Aliaga 2000] pour des applications de traitement thermique de pièces en acier, coulées ou forgées. Dans une première partie, nous adaptons ce schéma (prise en compte du contact et du frottement entre la pièce et les outils, en conséquence la déformation et le transfert thermique conductif) afin de pouvoir tester la nouvelle version sur des cas purement thermiques de forgeage (transferts conductifs) ainsi que sur des cas de déformation. La formulation mixte thermique est associée à des éléments finis mixtes discontinus P_0/P_0 ainsi qu'à un développement de Taylor explicite.

- Puis nous proposons une amélioration de cette méthode, **le modèle Galerkin Discontinu Implicite**, en nous appuyant sur les travaux de [Batkam 2002] qui utilise un schéma spatio-temporel muni d'éléments finis espace/temps discontinus. Ce modèle, muni d'une formulation plus locale avec l'élément fini mixte P_0/P_0^+ et d'un schéma d'Euler implicite, prendra en compte les conditions aux limites thermiques de type conduction et la déformation de la pièce.

Ces deux modèles sont ensuite validés et comparés sur des cas tests présentant une solution analytique, et enfin testés sur des applications 3D simples (avec et sans déformation).

2.1 Formulation mixte du problème thermique à 2 champs : la température et le flux de chaleur

Ecrivons le problème thermique instationnaire sous une formulation mixte à deux champs inconnus avant d'évoquer les deux techniques de résolution.

2.1.1 Equations

A partir des équations (1.5) et (1.8), la discrétisation du problème thermique peut être abordée différemment. La méthode de Galerkin, déjà présentée dans la section 1.2, englobe la loi de Fourier (1.8) dans l'équation de la chaleur (1.5) afin d'obtenir une forme irréductible de l'équation de la chaleur (1.10) avec une seule inconnue, la température T .

En choisissant de garder les deux équations, on opte pour une formulation dite "**mixte**". Le problème thermique sera alors modélisé par une formulation à deux champs : la température T et le flux de chaleur \vec{q} (ou encore la température T et le gradient de la température $\vec{\nabla}T$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = \dot{w} \\ \vec{q} = -k \vec{\nabla}T \end{array} \right. \quad \text{sur } \Omega \times]0, t[\quad (2.1)$$

(a)
(b)

Cette formulation à deux champs (2.1) permet de mieux représenter les gradients. De plus, elle permet d'imposer moins de dérivabilité aux champs inconnus. Par conséquent, le degré des fonctions d'interpolation pourra être choisi plus faible qu'avec une formulation Galerkin standard à un champ.

2.1.2 Conditions initiales et aux limites

Afin que le système d'équations (2.1) soit mathématiquement bien défini, nous devons rajouter un ensemble de conditions initiales et aux limites.

2.1.2.1 Conditions initiales

Pour ce problème thermique, la température et éventuellement le flux doivent être connus à l'instant initial. C'est ainsi que nous choisissons une écriture simplifiée des conditions avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T_0 \\ \vec{q} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

2.1.2.2 Conditions aux limites

Pour ce qui est des conditions aux limites, elles restent les mêmes que celles évoquées dans le premier chapitre (§ 1.1.2). Il y aura donc des conditions aux limites de type Dirichlet (avec la température ou le flux imposé(e)) ainsi que des conditions aux limites de type conduction et convection/rayonnement, pour définir le contact pièce/outil et pièce/air.

2.1.3 Formulation mixte

Finalement, les équations régissant le problème **thermique mixte instationnaire** se résument de la manière suivante : le problème mixte en température T /flux \vec{q} est constitué de

l'équation de la chaleur, de la loi de Fourier ainsi que des conditions initiales et aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = \dot{w} & \text{dans } \Omega \times]0, t[\quad \text{équation de la chaleur} \\ \vec{q} = -k \nabla T & \text{dans } \Omega \times]0, t[\quad \text{loi de Fourier} \\ T = T_0 \quad \text{et} \quad \vec{q} = \vec{0} & \text{conditions initiales} \\ T = T_{imp} & \text{sur } \Gamma_1 \times]0, t[\quad \text{conditions de Dirichlet} \\ \vec{q} \cdot \vec{n} = \phi_{imp} & \text{sur } \Gamma_2 \times]0, t[\\ \vec{q} \cdot \vec{n} = h_{cd}(T - T_{out}) & \text{sur } \Gamma_3 \times]0, t[\quad \text{condition de conduction} \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{q} \cdot \vec{n} = h(T - T_{ext}) \\ h = h_{cv} + h_r \\ h_r = \epsilon_r \sigma_r (T + T_{ext})(T^2 + T_{ext}^2) \end{array} \right. & \text{sur } \Gamma_4 \times]0, t[\quad \text{condition de convection/rayonnement} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Le problème (2.3) représente la formulation mixte forte du problème thermique instationnaire : à chaque pas de temps, un calcul du flux de chaleur se rajoute à celui de l'équation de la chaleur.

Maintenant que cette formulation mixte est établie, nous pouvons passer à la résolution numérique qui fait l'objet de la prochaine section.

2.2 Résolutions numériques : méthodes de type Galerkin Discontinu

MÉTHODES DE GALERKIN DISCONTINUES : TGD ET GDIMP

Nous présentons, dans cette partie, deux modèles numériques basés sur la méthode Galerkin Discontinue munie de l'élément fini constant P_0 :

- le schéma Taylor Galerkin Discontinu Explicite, noté TGD (§ 2.2.1),
- et le modèle Galerkin Discontinu Implicite, appelé Gdimp (§ 2.2.2).

2.2.1 Le schéma Taylor Galerkin Discontinu Explicite : TGD

Le schéma TGD combine les avantages d'une méthode spatiale de Galerkin Discontinue, basée sur l'élément fini de plus faible degré P_0 et d'une intégration temporelle de haut degré de Taylor (le degré $n = 3$ étant suffisant pour obtenir la stabilité du schéma).

De manière simplifiée, la méthode TGD est une méthode explicite qui correspond, en fait, à un schéma à deux pas : le premier pas calcule le flux \vec{q} avec (2.1.b) et le deuxième résout explicitement l'équation de la chaleur en calculant $\frac{\partial T}{\partial t}$ (2.1.a).

Pour modéliser correctement les diverses étapes de mise en forme d'une pièce forgée, quelques modifications seront donc nécessaires pour appliquer ce schéma. Il faudra notamment prendre correctement en compte la déformation de la pièce et gérer au mieux l'ensemble des conditions aux limites. Avant d'introduire la version TGD adaptée à l'étude du forgeage, nous rappelons succinctement la description du schéma développé par [Pichelin-Coupez 1999].

2.2.1.1 Discrétisation spatiale : schéma éléments finis discontinus

• Interpolation mixte de bas degré : schéma P_0/P_0

Lors de la résolution du problème thermique, il faut tenir compte des chocs thermiques et envisager l'existence de forts gradients thermiques. Le choix de l'espace d'approximation du champ de température est donc très important.

Tirant profit de l'interpolation mixte qui permet d'imposer moins de dérivabilité aux champs inconnus, [Pichelin-Coupez 1999] proposent un ordre d'interpolation le plus bas possible : **les constantes par élément**. La figure 2.1 illustre l'élément P_0/P_0 en **température/flux** :

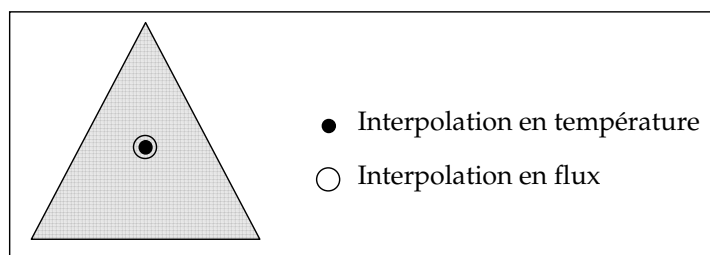


FIG. 2.1 – Configuration 2D de l'élément fini mixte P_0/P_0 en température/flux.

Des **espaces fonctionnels adéquats** vont donc être introduits pour exprimer correctement cette interpolation discontinue :

* La **température** T est **interpolée** par des **fonctions constantes par élément** :

$$T_h = \sum_{K \subset \Omega_h} T_{h|_K}, \quad T_h \in W_h \quad (2.4)$$

$$\text{où } \begin{cases} T_h : \text{l'interpolation } P_0 \text{ de la température } T, \\ W_h = \{ T_h \in L^2(\Omega), T_{h|_K} \in P_0(K) \ \forall K \in \Omega_h \} \text{ l'espace d'approximation pour } T, \\ \Omega_h : \text{une triangulation de } \Omega \text{ décomposée en } K \text{ simplexes,} \\ T_{h|_K} : \text{la valeur moyenne de la température } T \text{ sur l'élément } K \text{ avec :} \end{cases}$$

$$T_{h|_K} = T_K = \frac{1}{|K|} \int_K T(x) \, dv. \quad (2.5)$$

* De la même manière, nous avons **interpolé le flux** \vec{q} par des **fonctions** \vec{q}_h **constantes par élément** :

$$\vec{q}_h \in [W_h]^d = F_h. \quad (2.6)$$

• Définition du gradient et de la divergence d'une interpolation P_0

Une difficulté immédiate apparaît en utilisant cette méthode Galerkin Discontinue. Comme T n'est pas continue, le terme $\overrightarrow{\nabla T}$ ne peut plus être défini au sens fort sur Ω . Il faut donc

l'évaluer dans un sens plus faible, celui des distributions sur Ω :

$$\langle \overrightarrow{\nabla T_h}, \psi \rangle_{\Omega} = - \int_{\Omega} T_h \operatorname{div} \psi \, d\Omega = - \int_{\Gamma} T_h \psi \cdot \vec{n} \, ds \quad \forall \psi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^d \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} &= - \sum_{K \subset \Omega_h} \int_{\partial K} T_{h|_K} \psi \cdot \vec{n} \, ds \\ &= - \sum_{F \in \partial K} [T_h]_K^F \int_F \psi \cdot \vec{n}_K^F \, ds \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ainsi, afin d'approcher le gradient et la divergence d'une interpolation P_0 , nous utilisons les deux opérateurs introduits par [Coupez-Baranger 2002] :

- l'opérateur **gradient discret** $\overrightarrow{\nabla}_h : W_h \rightarrow [W_h]^d$ permettant donc d'approcher le gradient d'une interpolation P_0 avec :

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla}_h T_h = - \frac{1}{|K|} \sum_{F \in \partial K} \omega_K^F [T_h]_K^F |F| \vec{n}_K^F} \quad (2.9)$$

$[T_h]_K^F$ désigne le saut de T_h à travers la face F suivant la normale \vec{n}_K^F extérieure sortante de l'élément K . Représenté sur la figure (2.2), ce saut est défini par :

$$[T_h]_K^F = \sum_{K' \in \Omega(F)} T_{h|_{K'}} \vec{n}_{K'}^F \cdot \vec{n}_K^F \quad (2.10)$$

où $\Omega(F)$ représente le domaine formé par les éléments de K qui partagent la même face F . Les coefficients ω_K^F désignent des poids attribués aux éléments K adjacents à la face F et vérifiant $\sum_{K' \in \Omega(F)} \omega_{K'}^F = 1$.

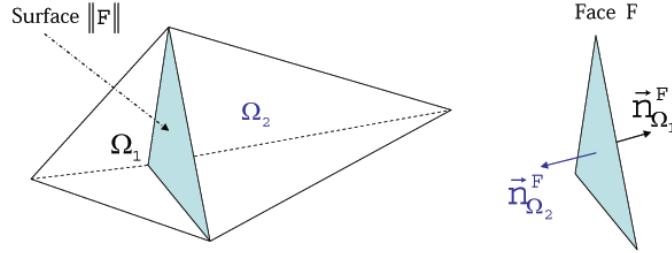


FIG. 2.2 – Calcul du saut à l'interface de deux éléments.

- et l'opérateur **divergence discrète** $\nabla_h \cdot : [W_h]^d \rightarrow W_h$ approchant la divergence d'une interpolation P_0 avec :

$$\boxed{\nabla_h \cdot \vec{q}_h = - \frac{1}{|K|} \sum_{F \in \partial K} \omega_K^F [\vec{q}_h]_K^F \cdot \vec{n}_K^F |F|} \quad (2.11)$$

- Ces deux opérateurs $\overrightarrow{\nabla}_h T_h$ et $\nabla_h \cdot \vec{q}_h$ sont respectivement une approximation au premier ordre de $\overrightarrow{\nabla T}$ et de $\nabla \cdot \vec{q}$ avec les relations :

$$\begin{cases} |(\overrightarrow{\nabla T} - \overrightarrow{\nabla}_h T_h, \varphi)| \leq C(|T|_{1,\Omega}) h |\varphi|_{1,\Omega} & \forall \varphi \in [H_0^1(\Omega)]^d \\ |(\nabla \cdot \vec{q} - \nabla_h \cdot \vec{q}_h, \varphi)| \leq C(|\vec{q}|_{1,\Omega}) h |\varphi|_{1,\Omega} & \forall \varphi \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (2.12)$$

• Application à la résolution de l'équation de la chaleur : bilan de la discrétisation spatiale

La théorie des distributions va nous permettre d'écrire correctement la formulation "faible" du problème mixte :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \vec{q}_h \cdot \psi \, d\Omega = -k < \overrightarrow{\nabla T_h}, \psi >_{\Omega} \quad \forall \psi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^d \\ \int_{\Omega} \frac{\partial T_h}{\partial t} \varphi \, d\Omega + \frac{1}{\rho c} < \nabla \cdot \vec{q}_h, \varphi >_{\Omega} = \frac{1}{\rho c} \int_{\Omega} \dot{w} \varphi \, d\Omega \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{cases} \quad (2.13)$$

Pour la discrétisation des termes de diffusion, $(\overrightarrow{\nabla T} \text{ et } \nabla \cdot \vec{q})$, nous nous ramenons, pour chaque élément K de la triangulation Ω_h , à une évaluation locale des termes $\overrightarrow{\nabla_h T_{h|K}}$ et $\nabla_h \cdot \vec{q}_{h|K}$, définis par les relations (2.9) et (2.11).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{K \subset \Omega_h} \int_K \vec{q}_h \cdot \psi \, dv = -k \sum_{K \subset \Omega_h} < \overrightarrow{\nabla_h T_{h|K}}, \psi >_K \\ \sum_{K \subset \Omega_h} \int_K \frac{\partial T_h}{\partial t} \varphi \, dv - \frac{1}{\rho c} \sum_{K \subset \Omega_h} < \nabla_h \cdot \vec{q}_{h|K}, \varphi >_K = \frac{1}{\rho c} \sum_{K \subset \Omega_h} \int_K \dot{w} \varphi \, dv \end{cases} \quad (2.14)$$

Afin que l'écriture du système (2.14) soit complète, il faut maintenant préciser les valeurs des poids ω_K^F qui interviennent dans les expressions discrètes du gradient (2.9) et de la divergence (2.11). Puisqu'il n'y a pas de parcours privilégié pour la propagation de chaleur (loi de conduction isotrope), le choix de la valeur des poids ω_K^F n'est soumis à aucune contrainte. C'est pourquoi [Pichelin 1998] propose comme valeurs :

$$\begin{cases} \omega_K^F = \frac{1}{2} & \text{pour des faces internes} \\ \omega_K^F = 1 & \text{pour des faces frontières} \end{cases} \quad (2.15)$$

Ainsi, en reportant (2.9) et (2.11) dans (2.14) et en supposant une interpolation constante par élément du second membre \dot{w} de (2.1), le schéma de Galerkin Discontinu pour des éléments mixtes P_0/P_0 en température/flux permet d'écrire et donc de résoudre localement le problème suivant :

Pour tout $K \in \Omega_h$, trouver $\vec{q}_K \in F_h$, $\frac{\partial T_K}{\partial t} \in W_h$ tel que :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{q}_K |K| = \sum_{F \in \partial K} k \omega_K^F [T_h]_K^F |F| \vec{n}_K^F \\ \frac{\partial T_K}{\partial t} |K| = \frac{1}{\rho c} \sum_{F \in \partial K} \omega_K^F [\vec{q}_h]_K^F \cdot \vec{n}_K^F |F| + \frac{1}{\rho c} \dot{w}_K |K| \end{cases}} \quad (2.16)$$

Remarque 2.1 *Le bilan de la discrétisation spatiale (2.16) met en évidence le fait que l'on doit résoudre un système local, pour lequel la température d'un élément K est calculée à l'instant suivant à partir des températures des deux couches d'éléments voisins. On parle alors de*

”formulation voisins des voisins”, illustrée par la figure 2.3. Par exemple, pour évaluer le terme dérivé $\frac{\partial T_K}{\partial t}$ sur chaque élément K de la triangulation, on a besoin des voisins de K ainsi que des voisins des voisins de K . Cela veut donc dire que l’on a besoin d’une contribution locale de 17 éléments dans le cas tridimensionnel (et de 10 éléments dans le cas bidimensionnel).

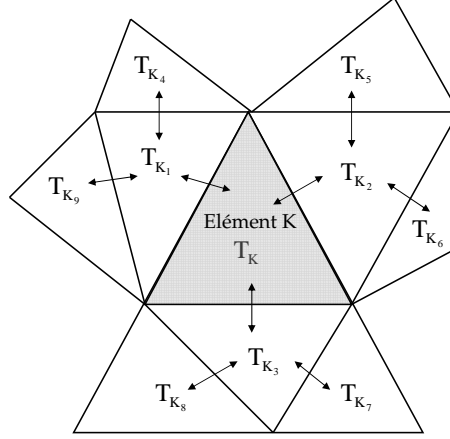


FIG. 2.3 – Schéma P_0/P_0 : contribution de 2 couches d’éléments au voisinage de l’élément K .

2.2.1.2 Schéma de discrétisation temporelle : Taylor explicite

Une méthode temporelle de Taylor est associée au schéma spatial Galerkin Discontinu : c’est ce que nous nommons la méthode Taylor Galerkin Discontinu. La méthode de Taylor Galerkin, préalablement décrite au cours du premier chapitre (§ 1.3.3), nous a permis d’établir de bonnes propriétés de stabilité en remarquant qu’elle est stable à partir du degré 3 [Donea 1984].

Connaissant le champ de température à l’instant t , on utilise un développement de Taylor explicite de degré n pour déterminer la température à l’instant suivant $t + \Delta t$:

$$\boxed{T(x, t + \Delta t) = T(x, t) + \Delta t \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n T}{\partial t^n}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta t^{n+1})} \quad (2.17)$$

Avec le schéma (2.17), le pas de temps Δt est automatiquement calculé en fonction d’une précision donnée sur le développement de Taylor (ou d’une erreur ε donnée que nous avons prise égale à 0,1 et qui joue le rôle d’un estimateur d’erreur a priori).

$$\Delta t \leq \left[(n+1)! \varepsilon \min \left(\left| \frac{\partial^{n+1} T}{\partial t^{n+1}} \right|^{-1} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (2.18)$$

Ainsi le schéma explicite est inconditionnellement stable. En dérivant successivement les équations du problème continu (2.1), on obtient de nouveaux systèmes dont les inconnues sont les dérivées en temps d’ordre supérieur du champ de température et de flux de chaleur :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial^{j+1} T}{\partial t^{j+1}} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial^j \vec{q}}{\partial t^j} \right) = \dot{w} \delta_0^j \\ \frac{\partial^j \vec{q}}{\partial t^j} = -k \vec{\nabla} \left(\frac{\partial^j T}{\partial t^j} \right) \quad \forall 1 \leq j \leq n \end{cases} \quad (2.19)$$

où δ_0^j est le symbole de Kronecker (valant 1 si $j = 0$ et zero autrement) et \dot{w} est supposée constante sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$.

On conserve le caractère local P_0 à chaque ordre j : la méthode de Galerkin Discontinue discrétise ces deux équations (2.19) qui auront pour inconnues les dérivées d'ordre supérieur de la température et du flux.

$$\begin{cases} \frac{\partial^j \vec{q}_h}{\partial t^j} = -k \vec{\nabla}_h \left(\frac{\partial^j T_h}{\partial t^j} \right) & \forall 1 \leq j \leq n \\ \rho c \frac{\partial^{j+1} T_h}{\partial t^{j+1}} + \vec{\nabla}_h \cdot \left(\frac{\partial^j \vec{q}_h}{\partial t^j} \right) = \dot{w}_h \delta_0^j \end{cases} \quad (2.20)$$

Une fois les dérivées $\frac{\partial^{j+1} T_h}{\partial t^{j+1}}$ calculées à l'aide de (2.20), elles sont directement injectées dans le schéma (2.17) pour en déduire la valeur de T_h à l'instant $t + \Delta t$.

En définitive, nous pouvons résumer toutes les étapes de la résolution par **l'algorithme TGD explicite**. Présenté sous la forme du tableau 2.1, cet algorithme met en évidence le fait que cette méthode TGD se déroule en deux phases pour chaque incrément de temps.

INITIALISATION :
T_h^t donnée
$p \leftarrow 1$
POUR TOUT $K \in \Omega_h$ FAIRE :
$\vec{q}_K^t = \frac{1}{ K } \sum_{F \in \partial K} k \omega_K^F [T_h^t]_F^K F \vec{n}_K^F$
$\frac{\partial T_K^t}{\partial t} = \frac{1}{ K \rho c} \sum_{F \in \partial K} \omega_K^F [\vec{q}_h^t]_K^F \cdot \vec{n}_K^F F + \frac{1}{\rho c} \dot{w}_K^t$
RÉPÈTE :
pour tout $K \in \Omega_h$ faire :
$\frac{\partial^p \vec{q}_K^t}{\partial t^p} = \frac{1}{ K } \sum_{F \in \partial K} k \omega_K^F \left[\frac{\partial^p T_h^t}{\partial t^p} \right]_K^F F \vec{n}_K^F$
$\frac{\partial^{p+1} T_K^t}{\partial t^{p+1}} = \frac{1}{ K \rho c} \sum_{F \in \partial K} \omega_K^F \left[\frac{\partial^p \vec{q}_K^t}{\partial t^p} \right]_K^F \cdot \vec{n}_K^F F $
$p \leftarrow p + 1$
JUSQU'À $p = n + 1$
$\Delta t \leq \left[(n+1)! \varepsilon \min \left(\left \frac{\partial^{n+1} T}{\partial t^{n+1}} \right ^{-1} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}}$
POUR TOUT $K \in \Omega_h$ FAIRE
$T_K^{t+\Delta t} = T_K^t + \Delta t \frac{\partial T_K^t}{\partial t} + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n T_K^t}{\partial t^n}$
FIN ALGORITHME

TAB. 2.1 – Algorithme de résolution Taylor Galerkin Discontinu.

2.2.1.3 Prise en compte des conditions aux limites thermiques

La prise en compte des conditions aux limites constitue la principale difficulté. En effet, dans notre cas, l'utilisation de la résolution TGD doit nous permettre de simuler le forgeage

en grandes déformations, avec du contact au niveau des outillages, et ceci à grande échelle de température. On peut donc souligner que nos conditions sont différentes de celles gérées par [Aliaga 2000] qui s'est uniquement intéressé au phénomène de trempe en présence de gradients thermiques importants entre la pièce et le bain de trempe (conditions aux limites type Dirichlet ou convection/rayonnement), autrement dit à un phénomène sans contact ni frottement, ni grande déformation.

Pour chaque élément frontière rencontré, il faudra étudier précisément ses conditions aux limites afin de déterminer au mieux \vec{q} , $\frac{\partial T}{\partial t}$ et leur dérivée jème respective. Trois types de transferts thermiques pourront alors se présenter :

- une température imposée sur une partie de la frontière,
- un flux de chaleur imposé sur une partie de la frontière,
- des échanges thermiques se produisant soit entre la pièce et l'outil (type conduction), soit entre la pièce et le milieu extérieur (type convection/rayonnement).

Pour un élément frontière K , on aura alors les quatre formules suivantes :

- Pour la dérivée d'ordre zéro du flux :

$$\vec{q} = \frac{1}{|K|} \sum_{F_{int}} \frac{k}{2} [T] |F| \vec{n} + \frac{1}{|K|} \sum_{F_{ext1}} k (T - \bar{T}) |F| \vec{n} + \sum_{F_{ext2}} \bar{q} \cdot \vec{n}$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \bar{T} = T_{imp} \text{ correspondant à la température extérieure imposée,} \\ \text{ou} \\ \bar{T} \text{ est la température d'un domaine en vis-à-vis avec une condition de contact} \\ \text{parfait,} \end{array} \right.$

et $\left\{ \begin{array}{l} \bar{q} = -\Phi_{imp} \text{ correspondant à la température extérieure imposée,} \\ \text{ou} \\ \bar{q} = h(T - T_f) \text{ où } T_f \text{ est soit la température du milieu extérieur, soit celle d'un} \\ \text{domaine en vis-à-vis, avec une condition d'échange avec un coefficient } h. \end{array} \right.$

- Pour la dérivée d'ordre j du flux :

$$\frac{\partial^j \vec{q}}{\partial t^j} = \frac{1}{|K|} \sum_{F_{int}} \frac{k}{2} \left[\frac{\partial^j T}{\partial t^j} \right] |F| \vec{n} + \frac{1}{|K|} \sum_{F_{ext1}} k \frac{\partial^j T}{\partial t^j} |F| \vec{n}$$

- Pour la dérivée première de la température :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{|K|} \sum_{F_{int}} \frac{1}{2\rho c} [\vec{q}] \cdot \vec{n} |F| + \frac{1}{|K|\rho c} \sum_{F_{ext2}} (\vec{q} - \bar{q}) \cdot \vec{n} |F| + \frac{1}{\rho c} \dot{w}$$

- Pour la dérivée d'ordre j de la température :

$$\frac{\partial^{j+1} T}{\partial t^{j+1}} = \frac{1}{|K|\rho c} \sum_{F_{int}} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^j \vec{q}}{\partial t^j} \right] \cdot \vec{n} |F| + \frac{1}{|K|\rho c} \sum_{F_{ext2}} \frac{\partial^j \vec{q}}{\partial t^j} \cdot \vec{n} |F|$$

- Le terme source \dot{w} :

Ce terme provenant du calcul mécanique est constant sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$ et devient nul

si la pièce ne subit aucune déformation. Par contre, quand il y a déformation, on a besoin de l'estimation de \dot{w} sur l'élément K pour calculer la dérivée première de la température; cette estimation est établie en additionnant les quatre valeurs de \dot{w} obtenues aux points d'intégration (pour un calcul 3D).

Toutes ces modifications permettent d'obtenir une nouvelle version du TGD pour la modélisation du procédé de forgeage: cette version, appelée TGD "forgeage", prend désormais en compte la déformation en plus de s'affranchir des chocs thermiques. Pour l'ensemble des tests présentés dans le paragraphe suivant, nous avons choisi de nous restreindre au degré ($n = 3$).

2.2.1.4 Validation du TGD sur des tests purement thermiques : comparaison avec une solution analytique instationnaire

Dans ce paragraphe, nous souhaitons vérifier la validité et l'efficacité de la version TGD "forgeage". Pour ce faire, nous reprenons le test standard en température imposée proposé par [Aliaga 2000] en complétant la base des résultats (sensibilité au pas d'espace, au pas de temps et aux données du matériau) et en rajoutant le test standard de flux imposé.

Ces deux tests purement thermiques ont une géométrie simple et une solution analytique bien connue [Agassant et al. 1996, Incropera-DeWitt 2001], indispensable pour évaluer la fiabilité du TGD. Nous nous intéresserons au refroidissement d'une barre d'acier semi-infinie soumise à une température constante en peau, puis au réchauffement de cette même barre soumise, cette fois, à un flux (positif) constant en peau. Dans les deux cas, nous nous ramenons à un problème monodimensionnel où la diffusion thermique est uniaxiale (figure 2.5).

a) Température imposée sur l'extrémité d'une barre d'acier semi-infinie

Nous reprenons ici le test déjà présenté dans le premier chapitre (section 1.2) faisant apparaître un choc thermique: c'est le test classique de refroidissement d'un barreau d'acier semi-infini, traité par [Aliaga 2000] puis repris notamment par [D'Alvise 2002] et [Fachinotti 2003].

Initialement, une barre d'acier de dimension $10 \times 10 \times 100 \text{ mm}$ est à la température T_0 de 800°C . A l'instant $t = 0$, on impose et on maintient une température T_{imp} de 25°C sur l'une de ses parois (figure 2.4) pendant 30s. On suppose, de plus, qu'il n'y a pas d'échange thermique avec l'air.

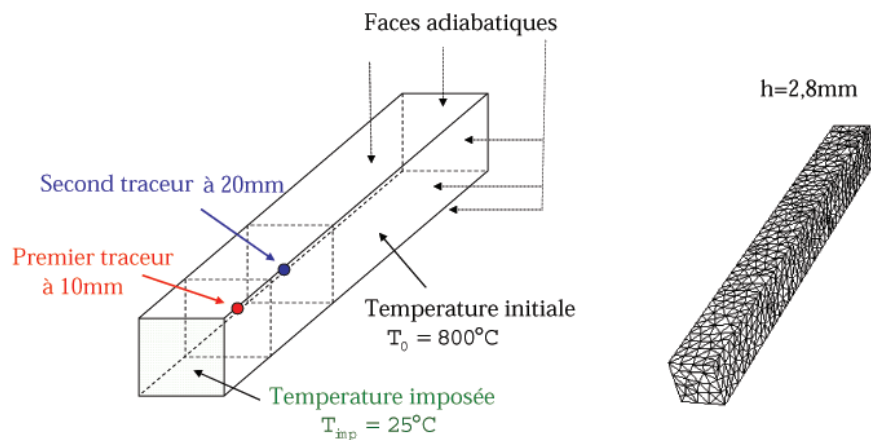


FIG. 2.4 – Barre d'acier à 800°C soumise à une température constante $T_{imp} = 25^\circ\text{C}$; maillage de la barre avec $h = 2.8\text{mm}$.

Les données du matériau sont celles d'un acier moyennement conducteur de chaleur :

$$\begin{cases} k &= 15 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} \\ \rho &= 7800 \text{ Kg.m}^{-3} \\ c &= 360 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \end{cases} \quad (2.21)$$

Pour étudier le refroidissement de la barre, mis en évidence sur la figure 2.5, deux traceurs sont positionnés afin de suivre leur évolution thermique au cours du temps : le premier traceur est situé à 10 mm du bord régulé thermiquement et le second à 20 mm de la surface; tous deux au centre de la barre (figure 2.4).

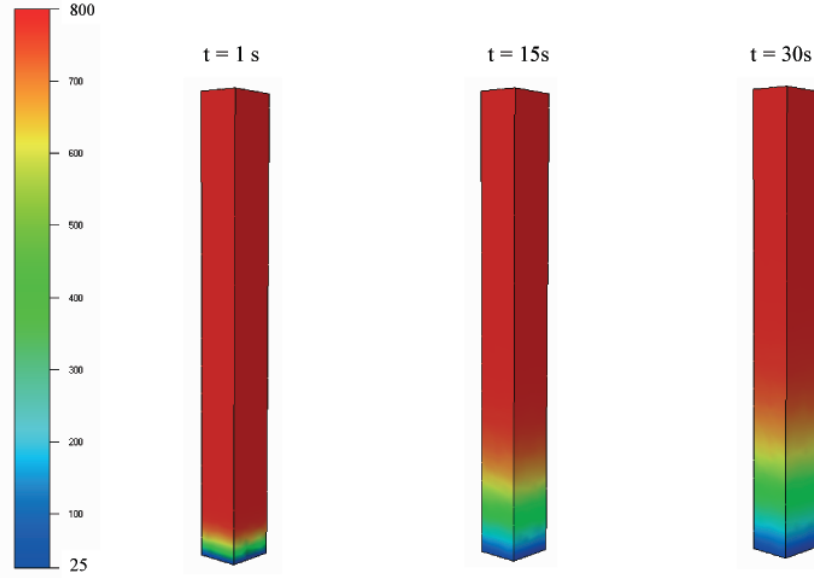


FIG. 2.5 – Isovaleurs de la température au cours de la résolution TGD : mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.

Avant de présenter les résultats numériques, nous rappelons la solution analytique de ce problème monodimensionnel et les observations de [Aliaga 2000].

- Refroidissement d'un barreau semi-infini : solution analytique

Pour ce problème monodimensionnel, une solution analytique [Agassant et al. 1996] est donnée par la formule suivante :

$$T(z,t) = T_{imp} + (T_0 - T_{imp}) * \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \quad (2.22)$$

Dans cette équation, z représente une profondeur donnée dans la direction uniaxiale de la barre et $a = \frac{k}{\rho c}$ la diffusivité thermique du matériau. La fonction erf est la fonction "erreur" définie par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (2.23)$$

La solution analytique correspondant à ces deux traceurs est représentée sur la figure 2.6.

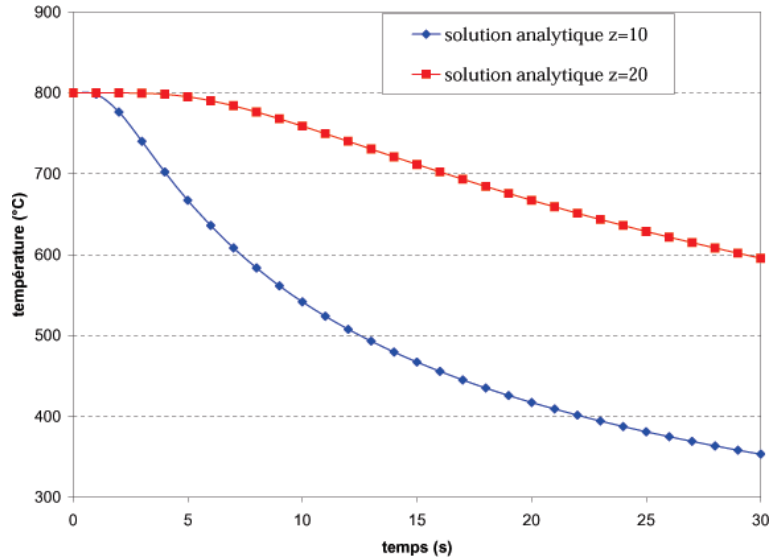


FIG. 2.6 – Représentation de la solution analytique pour les deux capteurs situés respectivement à 10 mm et 20 mm du bord régulé thermiquement.

- Rappel des observations de [Aliaga 2000] sur ce test

L’auteur a établi le résultat essentiel suivant : avec un maillage grossier et un pas de temps Δt ne respectant pas la relation de stabilité ($\Delta t \geq \Delta t_c = \frac{h^2}{4a}$), le phénomène du choc thermique est mis en évidence sur le deuxième noeud qui est anormalement chauffé; cet échauffement conduisant à une évolution thermique non physique de la température (figure 2.7).

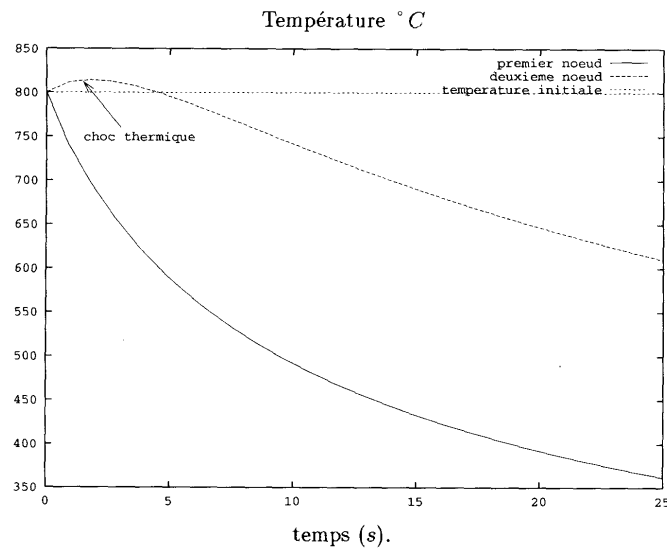


FIG. 2.7 – Représentation du choc thermique avec échauffement du second noeud [Aliaga 2000].

Il développa une version TGD dite TTT (Température-Temps-Transformation) pour l’appliquer au processus de traitement thermique qui absorbe le phénomène de choc thermique avec un maillage grossier (figure 2.8).

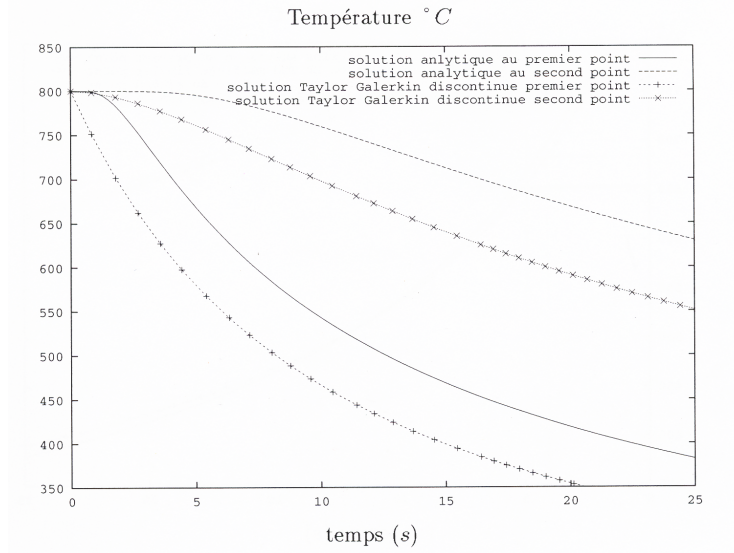


FIG. 2.8 – Absorption du choc thermique avec la version TGD "TTT" de [Aliaga 2000].

- Visualisation des résultats avec la version TGD "forgeage"

On observe dans un premier temps le comportement de la solution numérique obtenue avec une résolution TGD "forgeage" par rapport à celle d'un schéma TGD "TTT". Sur la figure 2.9, on compare alors l'évolution de la température des deux capteurs entre la solution analytique et la solution numérique TGD "forgeage". A taille de maille constante, de l'ordre de $h = 2,8\text{ mm}$ (figure 2.4), on constate une allure correcte des courbes TGD vis-à-vis des courbes analytiques, et ceci pour les deux traceurs.

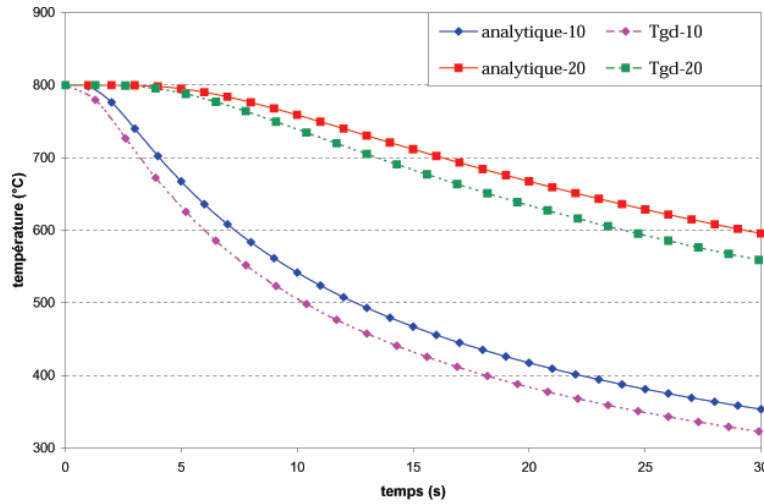


FIG. 2.9 – Evolution de la température des 2 traceurs : comparaison entre la solution analytique et la version TGD "forgeage" de Forge3[®].

Avec la version TGD "forgeage" (tout comme avec la version TGD "TTT"), le phénomène de choc thermique n'est plus visible sur l'évolution thermique du second capteur (cf figure 2.9). Autrement dit, la résolution TGD absorbe naturellement le choc thermique, sans technique de stabilisation, comme la méthode Galerkin associée à la thermique asynchrone.

Remarque 2.2 Sur la figure 2.9, il est intéressant d'observer que le refroidissement obtenu avec la version TGD "forgeage" est légèrement plus prononcé que le refroidissement analytique, ce qui suggère que la méthode TGD a tendance à refroidir plus vite que la normale et donc que ceci

peut être non négligeable lors du traitement de l'absorption de chocs thermiques beaucoup plus violents.

Par contre, en terme de précision, l'erreur du schéma numérique TGD est assez importante par rapport à la solution exacte, avec ce type de maillage ($h = 2,8 \text{ mm}$). Sur la figure 2.10, on a tracé l'évolution au cours du temps du pourcentage de l'erreur estimée pour les deux capteurs. Cette erreur s'avère moins importante avec le deuxième capteur, plus éloigné du bord imposé en température.

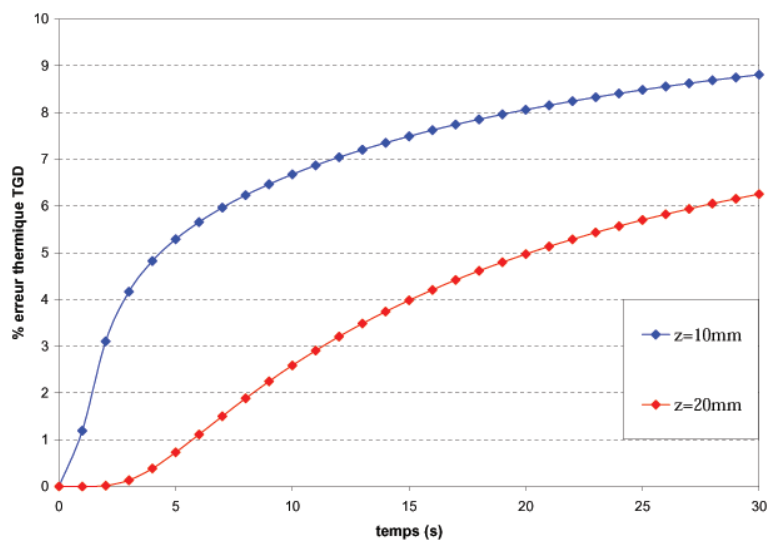


FIG. 2.10 – Evolution de l'erreur TGD (2.24) pour les deux traceurs.

L'estimation de l'erreur se fait à l'aide de la formule suivante :

$$e_T(z,t) = \frac{|T_{exact}(z,t) - T_{tgd}(z,t)|}{T_{exact}(z,t)} * 100 \quad (2.24)$$

où z représente la profondeur dans la direction de la diffusion thermique et t le temps.

Remarque 2.3 Dans certains cas (par exemple pour le test en flux imposé), on utilisera une estimation de l'erreur plus précise, l'erreur maximale avec :

$$e_{max}(z,t) = \frac{|T_{exact}(z,t) - T_{tgd}(z,t)|}{\max_t T_{exact}(z,t)} * 100 \quad (2.25)$$

Remarque 2.4 Dans le cas d'un maillage encore plus grossier ($h = 5 \text{ mm}$), la méthode TGD reste efficace en continuant d'absorber le choc (figure 2.11), toujours en sous-estimant la température analytique. N'oublions pas de signaler que le schéma TGD est déjà très fiable pour des capteurs placés en peau (ici $z = 1 \text{ mm}$ avec une erreur $\simeq 1,65\%$). Néanmoins, avec ce maillage grossier, l'erreur obtenue est nettement plus importante qu'avec $h = 2,8 \text{ mm}$. En effet :

- pour $h = 5 \text{ mm}$, le pourcentage d'erreur moyen est de $\simeq 9,3\%$ pour $z = 10 \text{ mm}$ et de $\simeq 4,8\%$ pour $z = 20 \text{ mm}$,
- pour $h = 2,8 \text{ mm}$, le pourcentage d'erreur moyen est de $\simeq 7\%$ pour $z = 10 \text{ mm}$ et de $\simeq 3,6\%$ pour $z = 20 \text{ mm}$.

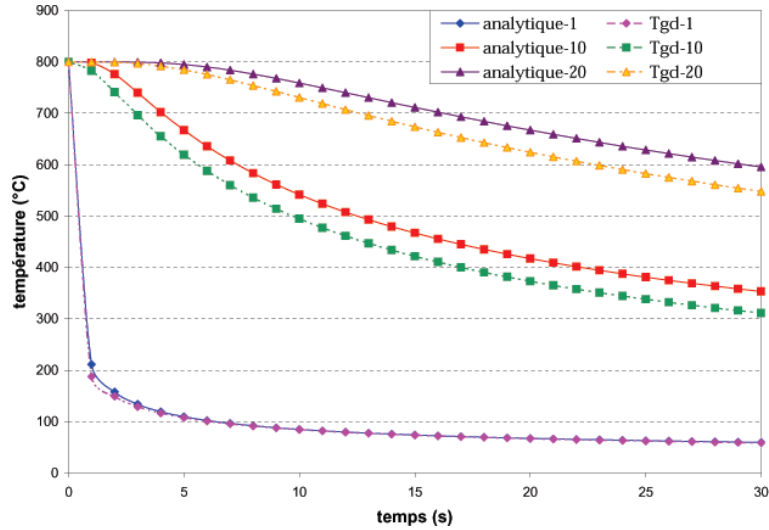


FIG. 2.11 – Evolution de la température TGD avec un maillage grossier $h = 5mm$.

Afin de compléter la validation du schéma TGD forgeage, nous étudions :

- l'influence que peut avoir le choix du mode de triangulation du maillage sur la solution numérique TGD
- le comportement de la solution TGD en raffinant le maillage
- la précision de la solution numérique en modifiant le pas de temps.

• Solution numérique : influence du mode de triangulation

Le but de cette étude est de voir comment se propage au cours du temps l'erreur induite par le choix d'un type de triangulation de maillage (tétraèdres à quatre noeuds). On se propose alors de comparer les résultats obtenus avec un maillage structuré et non structuré, tels qu'illustrés sur la figure 2.12. De la même manière que précédemment, on suit l'évolution thermique des deux capteurs et on regarde l'influence du maillage sur la solution numérique.

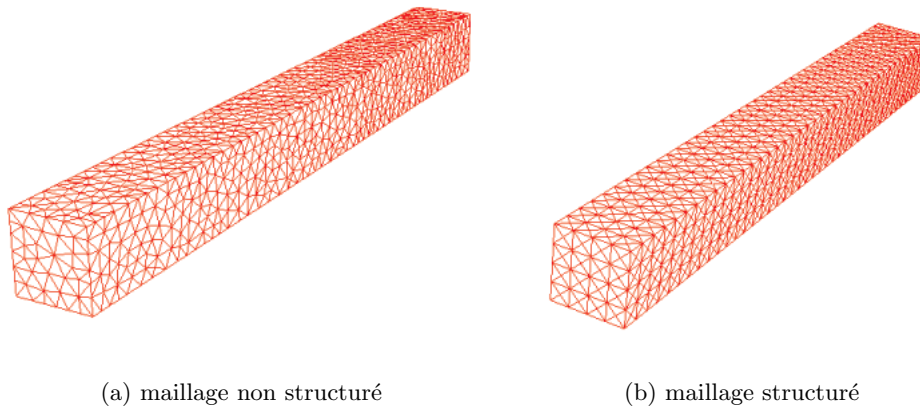


FIG. 2.12 – Taille de maille $h = 2,5mm$.

Ces maillages sont construits de manière à avoir une taille de maille identique $h = 2,5mm$:

- Un premier maillage est constitué d'éléments isotropes non structurés avec 2146 noeuds et 7457 éléments (figure 2.12(a)),
- Et un deuxième maillage composé de tétraèdres structurés avec 1662 noeuds et 5248 éléments (figure 2.12(b)).

Malgré cette construction, le maillage non structuré possède plus d'éléments que le non structuré; ce qui peut produire une solution numérique plus précise aux dépens d'un temps CPU plus important.

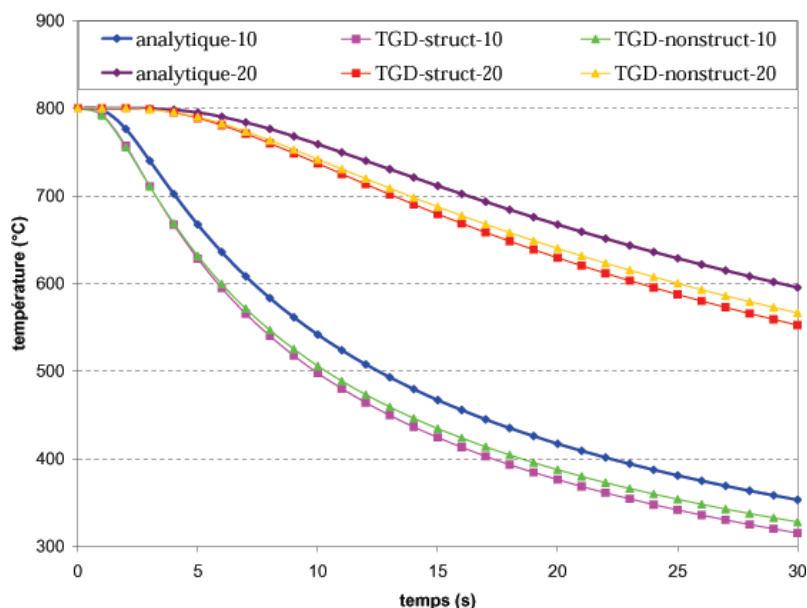


FIG. 2.13 – Evolution de la température TGD : influence du mode de triangulation du maillage pour $h = 2,5 \text{ mm}$.

Les tracés de la figure 2.13 montrent que pour une taille de maille identique, la thermique TGD reste stable vis-à-vis du maillage : les résultats avec un maillage structuré sont proches de ceux obtenus avec un maillage non structuré, malgré une différence assez significative de la précision (cf tableau 2.2).

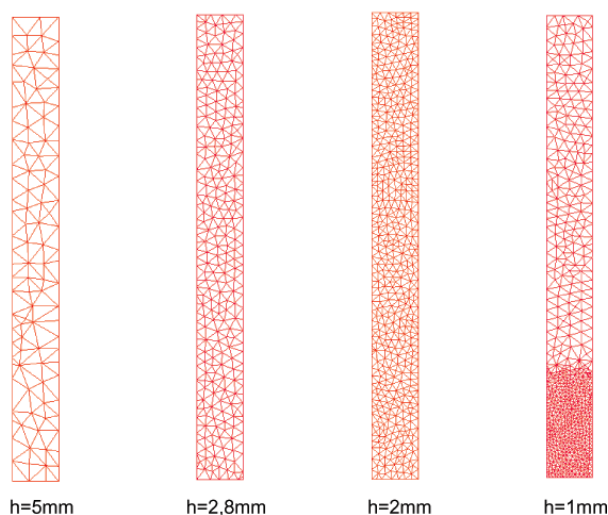
$[0,30 \text{ s}]$	MAILLAGE STRUCTURÉ $h = 2,5 \text{ mm}$	MAILLAGE NON STRUCTURÉ $h = 2,5 \text{ mm}$
CPU TGD	4 min 25 s	4 min 30 s
% erreur TGD $z = 10 \text{ mm}$	8,3%	6,3%

TAB. 2.2 – Comparaison des temps de calculs et de l'erreur du schéma TGD.

- Influence du maillage sur la solution numérique TGD à pas de temps fixé

On s'intéresse maintenant à la convergence au cours du temps du schéma TGD. Pour un pas de temps fixé ($dt = 1 \text{ s}$), on va analyser le comportement de la solution de nos deux traceurs pour des maillages non structurés progressivement raffinés. On considère alors quatre maillages dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 2.3, de taille de maille moyenne respective de l'ordre de $h = 5 \text{ mm}$, $h = 2,8 \text{ mm}$, $h = 2 \text{ mm}$ et $h = 1 \text{ mm}$ (figure 2.14).

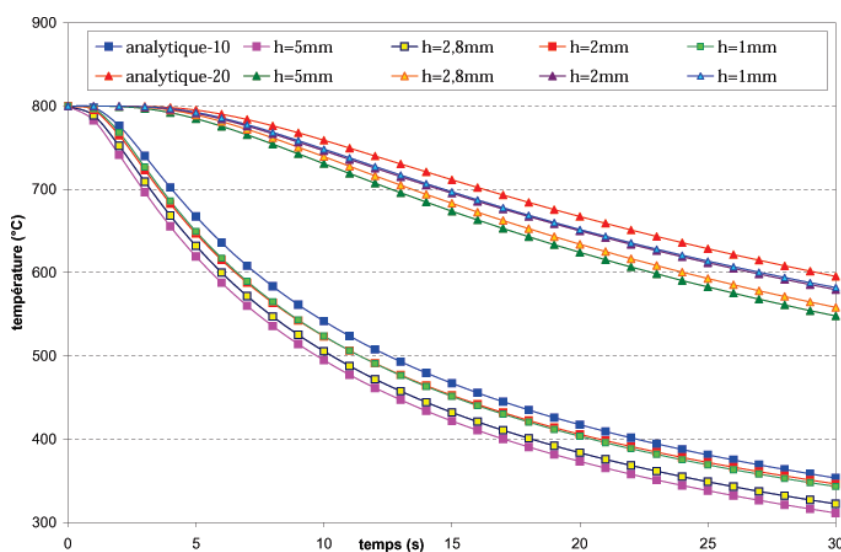
Pour chacun des deux traceurs, nous avons représenté sur la figure 2.15 la courbe analytique et l'évolution de la solution numérique au cours du temps pour les différents maillages considérés.

FIG. 2.14 – *Raffinement du maillage de la barre.*

	$h = 5 \text{ mm}$	$h = 2,8 \text{ mm}$	$h = 2 \text{ mm}$	$h = 1 \text{ mm}$
nombre de noeuds	380	1134	3046	5783
nombre d'éléments	1000	3649	11188	24050

TAB. 2.3 – *Caractéristiques des maillages.*

Comme en témoigne la figure 2.15, à chaque incrément de temps $[t, t + dt[$, la solution numérique converge d'autant mieux vers la solution analytique que le maillage est fin. Remailler la pièce donne de meilleurs résultats mais c'est malheureusement au détriment d'une durée de calcul beaucoup trop importante, avoisinant plusieurs heures au lieu de quelques minutes (cf tableau 2.4). L'ordinateur utilisé est un pentium 4 de 3,05 *GHz* et 1 *Go* de RAM.

FIG. 2.15 – *Evolution thermique TGD des deux traceurs en fonction du raffinement du maillage à pas de temps fixé ($dt = 1 \text{ s}$).*

$[0,30\text{ s}]$	$h = 5\text{ mm}$	$h = 2,8\text{ mm}$	$h = 2\text{ mm}$	$h = 1\text{ mm}$
CPU TGD	23 s	2 min 17 s	19 min	3 h
% erreur moyenne de $z = 10\text{ mm}$	9,3%	7%	2,9%	2,7%
% erreur moyenne de $z = 20\text{ mm}$	4,8%	3,6%	1,9%	1,7%

TAB. 2.4 – Comparaison des temps de calculs et des erreurs thermiques TGD.

Les figures 2.16.a et 2.16.b représentent respectivement l'évolution au cours du temps des pourcentages d'erreurs thermiques pour le premier puis pour le second capteur, avec les quatre maillages. Elles permettent de mieux visualiser la pertinence du TGD avec les maillages les plus raffinés que les évolutions de la température tracées sur la figure 2.15. On peut toutefois remarquer qu'entre les maillages les plus fins ($h = 2\text{ mm}$ et $h = 1\text{ mm}$), le temps de calcul a été multiplié par 9 alors que le pourcentage d'erreur n'est amélioré que de 0,2%.

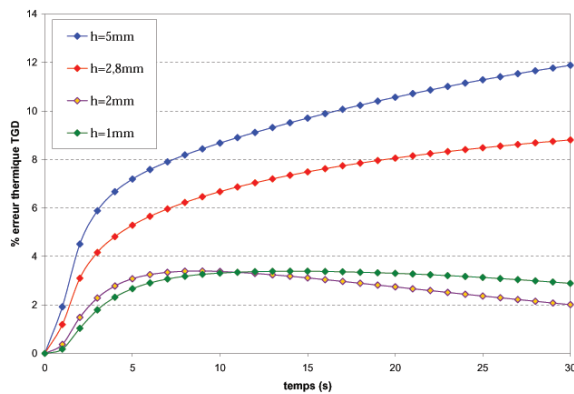
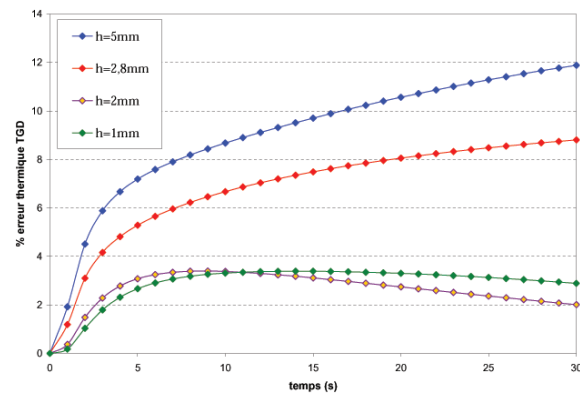
(a) Premier noeud : $z = 10\text{ mm}$ (b) Second noeud : $z = 20\text{ mm}$

FIG. 2.16 – Etude de l'erreur de la solution numérique TGD en fonction du maillage.

Remarque 2.5 Avec un pas de temps encore plus petit ($dt = 0,25\text{ s}$), le schéma TGD absorbe toujours le choc et offre une solution numérique un peu plus précise au prix d'un temps de résolution encore plus important (cf tableau 2.5).

$[0,30\text{ s}]$	CPU TGD	erreur moyenne $z = 10\text{ mm}$	erreur moyenne $z = 20\text{ mm}$
$h = 5\text{ mm}$	67 s	9,1%	4,7%
$h = 1\text{ mm}$	4 h	2,67%	1,6%

TAB. 2.5 – Comparaison des temps de calculs et des erreurs thermiques TGD pour $dt = 0,25\text{ s}$.

- Solution numérique : Influence du pas de temps à maillage fixé

Pour une question de temps de calculs évoquée ci-dessus, nous optons ici pour une taille de maille de 2 mm , en vue d'étudier le comportement de la solution TGD avec des pas de temps

(mécaniques) variables. Autrement dit, la solution sera-t-elle sensible au raffinement du pas de temps (dt) sachant que la température au pas de temps suivant ($t + dt$) est calculée à partir du développement de Taylor et non en résolvant un système linéaire d'équations.

Nous nous proposons alors de suivre l'évolution thermique des deux capteurs avec respectivement un pas de temps dt fixé à $5s$, $2s$, $1s$, $0,5s$ et $0,25s$, pendant $30s$ de simulation. Les résultats sont visibles sur le graphe 2.17, avec des courbes similaires.

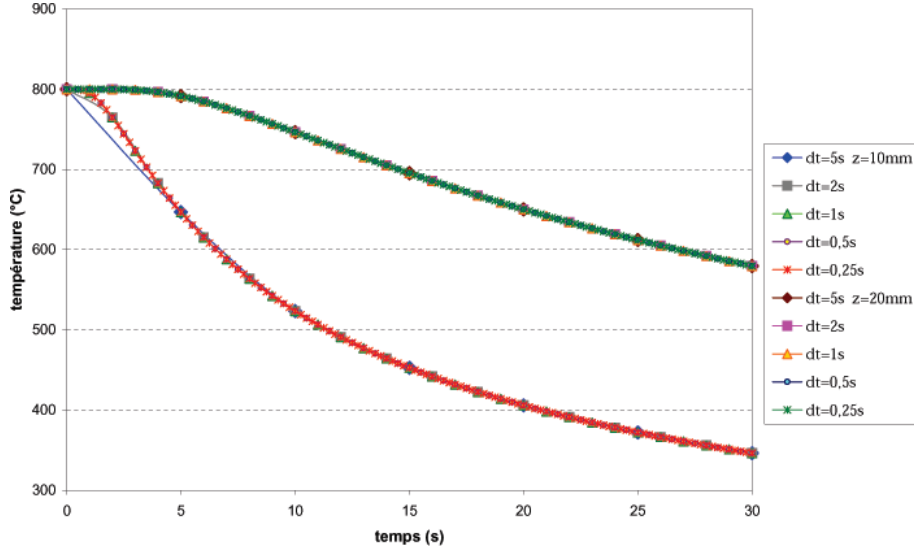


FIG. 2.17 – Evolution thermique en fonction du pas de temps dt à maillage fixé ($h = 2mm$).

Par contre, pour un temps donné (par exemple $t = 10s$), la température est identique quel que soit le pas de temps utilisé ($523,36^\circ C$ pour $z = 10mm$ et $746,4^\circ C$ pour $z = 20mm$); ceci provenant directement du développement de Taylor explicite. D'ailleurs, pour tous ces pas de temps mécaniques, l'erreur TGD est la même avec respectivement 2,67% et 1,84% pour le premier et le second noeuds (figure 2.18).

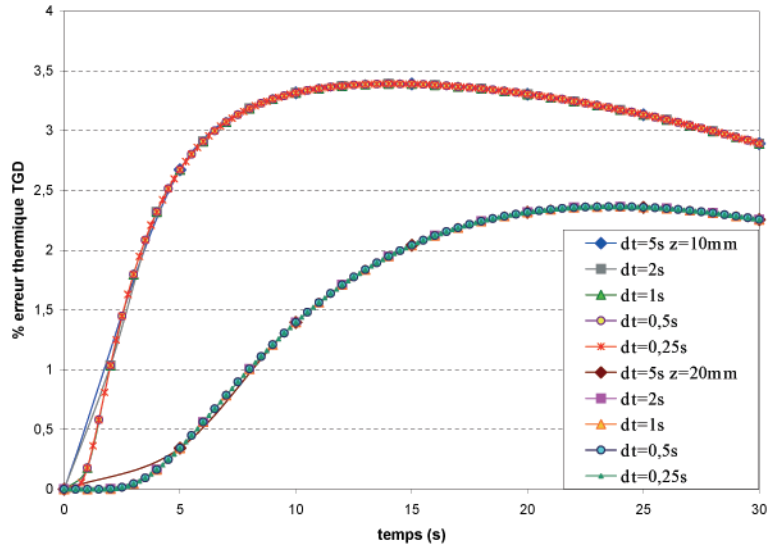


FIG. 2.18 – Evolution de l'erreur TGD des deux traceurs en fonction de dt avec $h = 2mm$.

Forcément, les temps de calculs résumés dans le tableau 2.6 sont plus importants avec un pas de temps plus petit.

TGD	$dt = 5s$	$dt = 2s$	$dt = 1s$	$dt = 0,5s$	$dt = 0,25s$
CPU	17 min	18 min 30 s	19 min	22 min	27 min

TAB. 2.6 – Comparaison des temps de calculs.

- Conclusions

Ces résultats montrent que la version TGD "forgeage" a été correctement implantée. On retrouve bien un schéma stable à l'ordre trois. Pour les problèmes de diffusion pure, cette méthode s'avère très efficace en absorbant naturellement le choc thermique.

Du fait de son faible degré d'interpolation des inconnues, il est normal que les champs de température estimés soient très imprécis avec des maillages grossiers. Par contre, on a vu que sa précision était particulièrement fiable pour des maillages fins, montrant ainsi la grande sensibilité du modèle au maillage avec malgré tout des temps de calculs trop élevés. En fait, l'augmentation de ces temps de calculs provient tout simplement de son caractère explicite qui, malgré l'absence de résolution de systèmes linéaires, impose l'utilisation de petites valeurs du pas de temps.

b) Analyse de sensibilité sur le test de température imposée

Afin de clore la validation de cette nouvelle version du TGD sur le test de température imposée, nous testons sa sensibilité aux deux jeux de paramètres suivants :

- d'abord, aux données du schéma de Taylor explicite : n et ε (2.18)
- puis aux données du matériau : k , ρ et c (2.21)

- Analyse de sensibilité des paramètres n et ε

Afin d'assurer la stabilité du schéma TGD, nous avons vu que le développement de Taylor explicite devait être au moins de degré 3. Jusqu'à présent, nous avons choisi de conserver ce degré pour l'ensemble des validations. Nous nous proposons à présent d'établir le comportement de la solution TGD en l'utilisant avec un degré plus élevé.

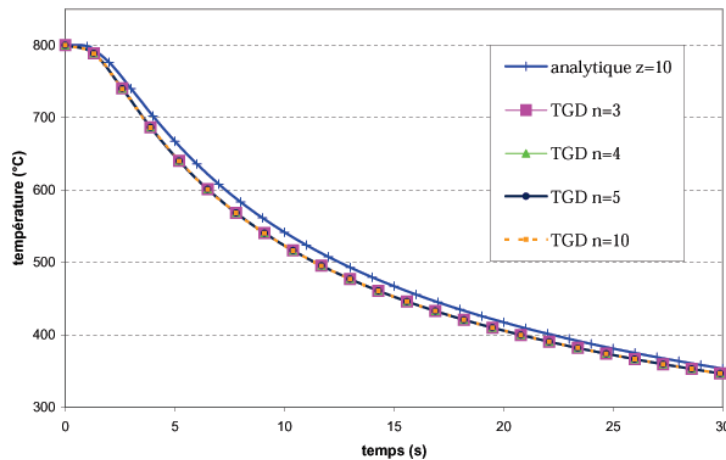


FIG. 2.19 – Sensibilité du schéma TGD au degré n : évolution de la température pour $z = 10\text{mm}$ et $h = 2\text{mm}$.

Ainsi, suivons l'évolution de la température au niveau du premier capteur avec ε fixé à 0,1 et pour plusieurs valeurs de n ($n = 3, 4, 5$ et 10). Comme en témoigne la figure 2.19, les courbes obtenues sont identiques quel que soit le degré employé avec une taille de maille constante de 2 mm.

En effet, plus le degré n est grand, plus le nombre de dérivées n ième qui interviennent augmente, ce qui se traduit numériquement par le rajout de termes de plus en plus petits, voire insignifiants sur la précision du champ de température qui est, dans notre cas, de l'ordre de 0,01°C.

En terme d'erreur (2.24), la moyenne des pourcentages de l'erreur est presque similaire ($\simeq 2,7\%$). Bien évidemment, en terme de coût (cf tableau 2.7), les temps de calculs sont plus importants avec l'augmentation du degré n plus grand qui nécessite l'estimation d'un plus grand nombre de termes dérivées $\frac{\partial^n \vec{q}}{\partial t^n}$ et donc de $\frac{\partial^n T}{\partial t^n}$:

[0,30 s]	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 10$
CPU	19min	21min	23min	25min

TAB. 2.7 – Comparaison des temps de calculs.

\Rightarrow **Le degré 3** est donc suffisant pour avoir un schéma stable avec une précision et un temps de calcul acceptable.

D'autre part, en reprenant l'algorithme du TGD (tableau 2.1), nous avons vu qu'il y a un critère d'arrêt pour déterminer le pas de temps thermique Δt (interne au calcul thermique TGD) en fonction d'une erreur ε (2.18), jouant le rôle d'un estimateur d'erreur à priori et prise par défaut à 0,1. Si on revient à cette formule (2.18) avec le paramètre n fixé

$$\Delta t \leq \left[(n+1)! \varepsilon \min \left(\left| \frac{\partial^{n+1} T}{\partial t^{n+1}} \right|^{-1} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}}$$

on constate que le pas de temps Δt thermique TGD diminue si cette erreur ε diminue.

Suivons l'évolution thermique au niveau du premier capteur avec $n = 3$ et pour diverses valeurs de ε ($\varepsilon = 5; 1; 0,1; 0,01$). Représentées sur la figure 2.20, les quatre évolutions thermiques TGD apparaissent similaires.

En terme de précision, le pourcentage de l'erreur thermique TGD (calculé à partir de (2.24)) est quasiment identique pour toutes les valeurs de ε (cf tableau 2.8), avec une légère amélioration pour un ε plus petit.

[0,30 s]	$\varepsilon = 5$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,01$
CPU	18min	18min 30s	19min	20min
Moyenne du pourcentage d'erreur	2,70%	2,69%	2,68%	2,68%

TAB. 2.8 – Comparaison des temps de calculs et des erreurs moyennes TGD.

En ce qui concerne les temps de calcul, en souhaitant une estimation plus précise (avec donc l'activation d'un ε plus faible), on va légèrement augmenter le temps de calcul. En effet, avec ε

plus petit, le pas de temps Δt thermique interne au calcul du TGD est plus petit et donc il faut plus d'incrémentations sur ce pas de temps ($t + \Delta t$) pour se ramener au pas de temps réel dt mécanique (ou thermique), valant ici $dt = 1s$.

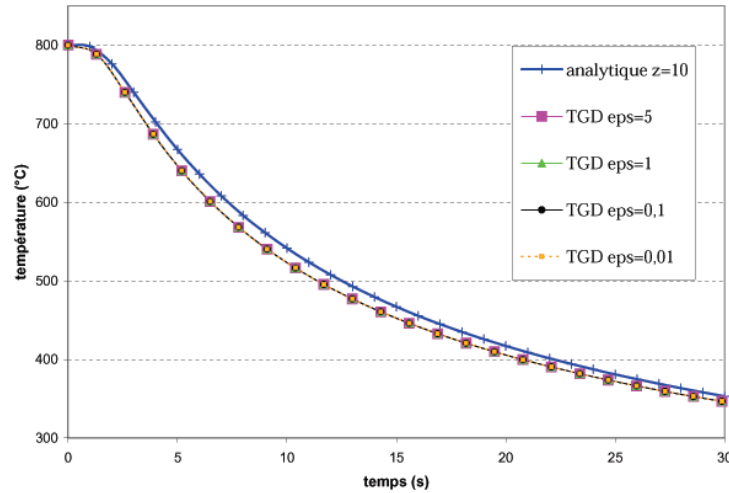


FIG. 2.20 – Sensibilité du schéma TGD en fonction de l'erreur ε : évolution de la température pour $z = 10mm$ et $h = 2mm$.

⇒ L'erreur $\varepsilon = 0,1$ prise par défaut est finalement un bon compromis entre la précision et le temp de calcul.

- Analyse de sensibilité des paramètres k , ρ et c

Enfin, nous nous proposons de regarder brièvement si l'évolution de la température est cohérente en modifiant, à tour de rôle, l'un des paramètres k , ρ ou c , préalablement fixés à :

$$k = 15 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}, \quad \rho = 7800 \text{ Kg.m}^{-3}, \quad c = 360 \text{ J.Kg}^{-1}.K^{-1}.$$

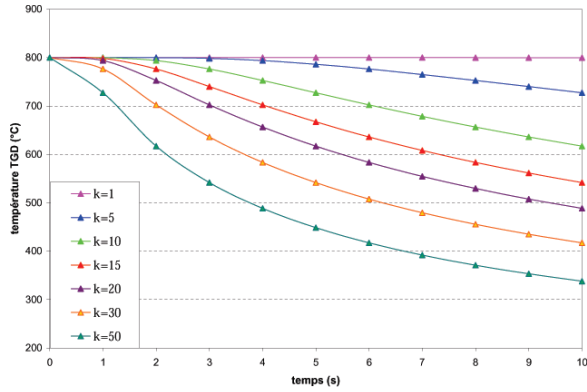
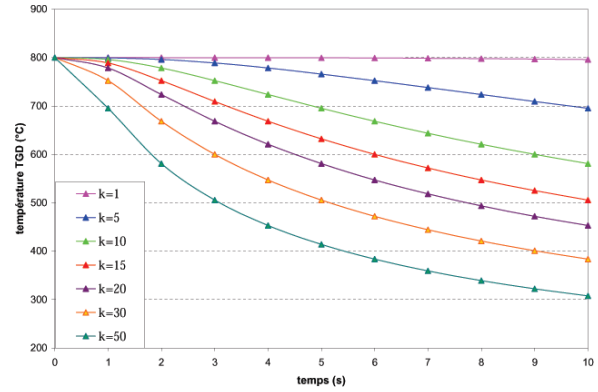
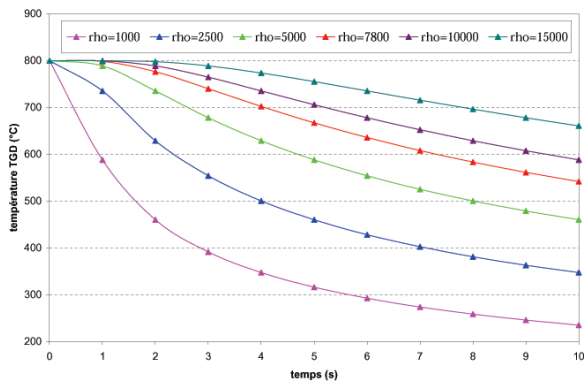
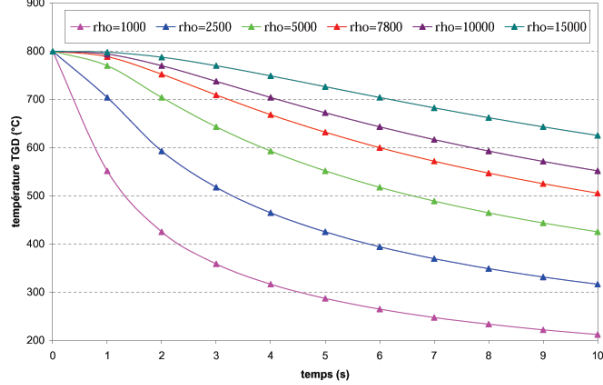
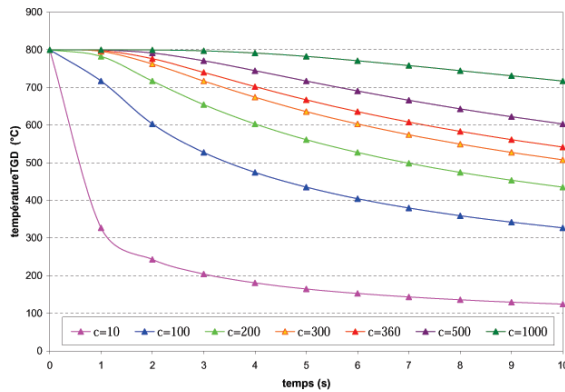
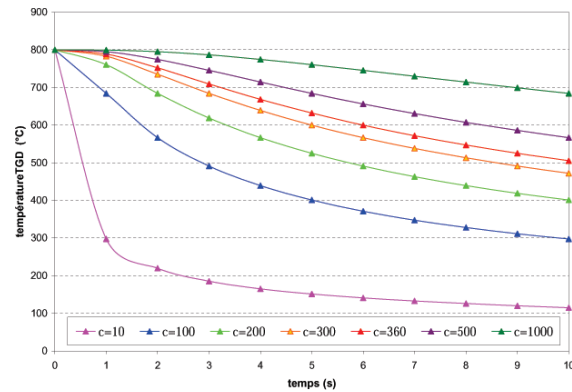
Les trois tests se résument dans le tableau ci-dessous.

1 ^{er} cas ρ et c fixés	k=1	k=5	k=10	k=15	k=20	k=30	k=50
2 ^{ème} cas k et c fixés	$\rho = 1000$	$\rho = 2500$	$\rho = 5000$	$\rho = 7800$	$\rho = 10\,000$	$\rho = 15\,000$	
3 ^{ème} cas k et ρ fixés	c=10	c=100	c=200	c=300	c=360	c=500	c=1000

TAB. 2.9 – Présentations des trois tests.

Via la solution exacte (2.22), une étude comparative concerne le premier capteur. Sur chacune des figures 2.21, on retrouve les courbes analytiques à gauche (a, c, e) et les courbes TGD à droite (b, d, f), en fonction de la variation de la conductivité k du matériau (a, b), puis celle de la densité ρ (c, d) et enfin celle de la capacité c (e, f). Il en découle une allure des courbes TGD sensiblement similaire aux tracés analytiques avec les résultats souhaités et attendus, c'est à dire :

- Plus la conductivité k du matériau augmente, plus le refroidissement dans la pièce est brutal. Autrement dit, la diffusion thermique dans la pièce est d'autant plus rapide et brutale que la conductivité du matériau est importante.
- Moins un matériau est dense (plus la densité ρ diminue), plus la diffusion thermique dans la pièce sera importante et rapide.
- La diffusion thermique se propage d'autant plus vite que la capacité calorifique c du matériau est faible.

(a) courbes analytiques : influence de k (b) courbes TGD : influence de la conductivité k (c) courbes analytiques : influence de ρ (d) courbes TGD : influence de la densité ρ (e) courbes analytiques : influence de c (f) courbes TGD : influence de la capacité c FIG. 2.21 – Evolution de la température pour le capteur situé à $z = 10\text{mm}$ avec $h = 2,8\text{mm}$.

Plus précisément, grâce aux figures et tableaux de l'Annexe C, on se rend compte que l'erreur TGD augmente avec une diffusivité croissante et diminue avec une densité faible mais aussi avec une faible capacité calorifique (cf tableau 2.10). De manière schématique :

$k \nearrow$	erreur TGD \nearrow	refroidissement violent et rapide
$\rho \nearrow$	erreur TGD \searrow	refroidissement faible et lent
$c \nearrow$	erreur TGD \searrow	refroidissement faible et lent

TAB. 2.10 – Synthèse de tous les tests.

c) Flux imposé sur l'extrémité d'une barre d'acier semi-infinie

S'inscrivant aussi dans le contexte d'un problème de diffusion thermique instationnaire, cette deuxième étude présente un test classique traité par [D'Alvise 2002] : c'est l'échauffement d'un barreau d'acier semi-infini provoqué par un flux de chaleur imposé.

A l'instant $t = 0$, on maintient un flux $\Phi_{imp} = 1 \text{ MW}/\text{m}^2$ sur l'une des parois de la barre qui a une température initiale $T_0 = 25^\circ\text{C}$ (figure 2.22). Ainsi la barre va se réchauffer rapidement (figure 2.23). Les données du matériau sont celles précédemment décrites, à savoir celles d'un acier moyennement conducteur de chaleur (2.21). Pour ce nouveau test, tout autre type d'échanges thermiques est encore exclu.

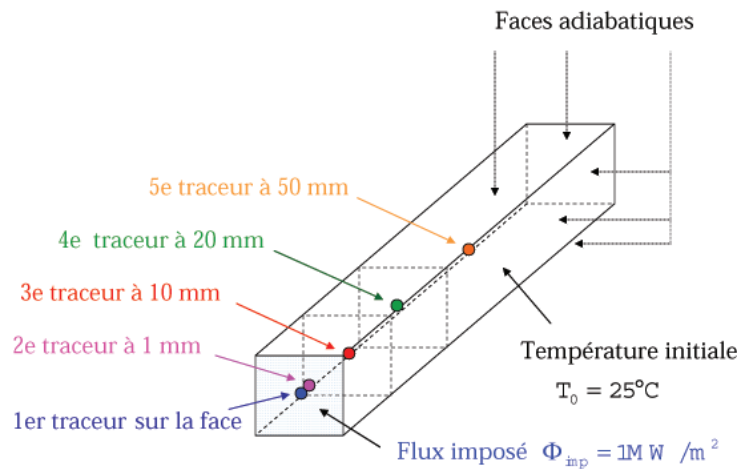


FIG. 2.22 – Barre d'acier à 25°C soumise à un flux constant $\Phi_{imp} = 1 \text{ MW}/\text{m}^2$.

Pour étudier l'échauffement de la barre, cinq traceurs sont positionnés afin d'évaluer correctement le champ de température au cours du temps (figure 2.22) : le premier traceur est situé au milieu de la paroi inférieure régulée thermiquement et les autres sont respectivement à 1 mm , 10 mm , 20 mm et 50 mm du bord.

Ce deuxième cas test possède également une solution analytique qui est formulée ci-dessous.

- Echauffement d'un barreau semi-infini : solution analytique

Une solution analytique générale [Incropera-DeWitt 2001] de ce problème monodimensionnel

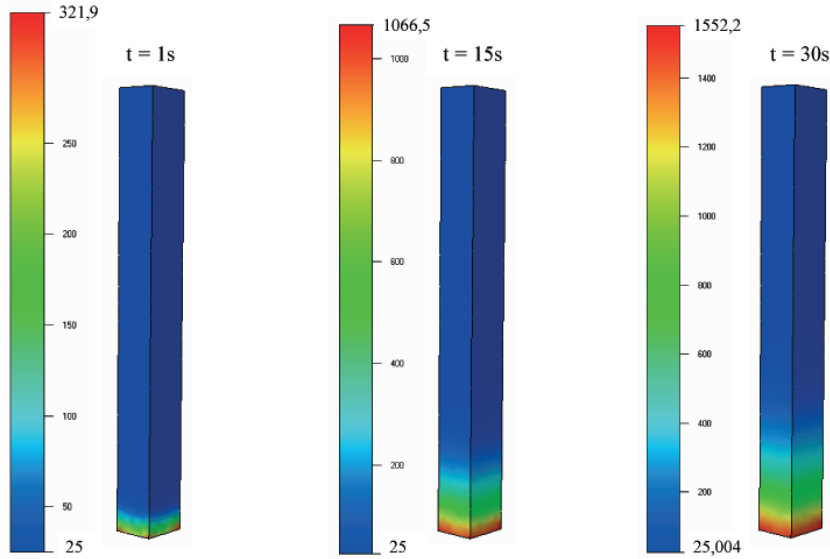


FIG. 2.23 – Isovaleurs de la température au cours de la résolution thermique TGD.

s'écrit :

$$T(z,t) = T_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Phi_{imp} \sqrt{a}}{k} \sqrt{t} * \exp\left(\frac{-z^2}{4at}\right) - \frac{\Phi_{imp} z}{k} * \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) \quad (2.26)$$

Le cas particulier $z = 0$ simplifie la solution analytique en se mettant sous la forme :

$$T(0,t) = T_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Phi_{imp}}{\sqrt{k \rho c}} \sqrt{t} \quad (2.27)$$

Dans ces deux équations, $a = \frac{k}{\rho c}$ représente la diffusivité thermique du matériau et z une profondeur donnée dans la direction uniaxiale de la barre.

La fonction erfc est la fonction "erreur complémentaire" définie par :

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du. \quad (2.28)$$

La solution analytique correspondant aux divers traceurs est représentée sur la figure 2.24. Bien évidemment, le réchauffement dans la barre s'estompe en s'éloignant du bord régulé thermiquement : c'est le phénomène de diffusion thermique.

L'avantage de ce deuxième cas est, qu'en plus de l'existence d'une solution analytique, la condition de flux imposé est généralement intégrée dans la plupart des logiciels (2D et 3D) simulant les procédés de mise en forme des métaux. Ainsi, nous aurons à notre disposition de nouvelles solutions numériques indispensables à la comparaison de notre méthode TGD. Ces solutions numériques ne sont autres que les approches Galerkin standards combinées à la thermique asynchrone (notées GS asynchrone) pour les codes de calculs éléments finis 2D Forge2[®] et 3D Forge3[®]. On rajoute aussi les solutions numériques provenant d'un code de calculs éléments finis traitant essentiellement de la fonderie, avec R2sol[®] (2D) et avec Thercast[®] (3D).

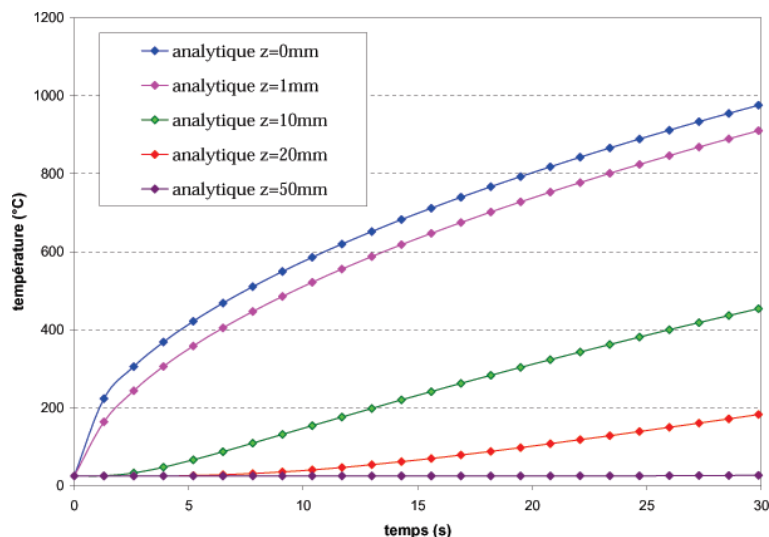


FIG. 2.24 – Représentation de la solution analytique pour cinq capteurs situés respectivement à 0 mm, 1 mm, 10 mm, 20 mm et 50 mm du bord régulé thermiquement.

- Visualisation des résultats de la solution numérique TGD "forgeage"

Comme précédemment, pour l'ensemble des capteurs, nous suivons leur évolution thermique TGD (figure 2.25) que nous comparons ensuite à la solution analytique (figure 2.24), pour un maillage donné ($h = 2,3\text{ mm}$). La tendance des courbes TGD se révèle la même que celle des courbes analytiques. Cependant, un décalage qualitativement de 400°C est observé entre les résultats numériques et analytiques, notamment pour les trois premiers capteurs.

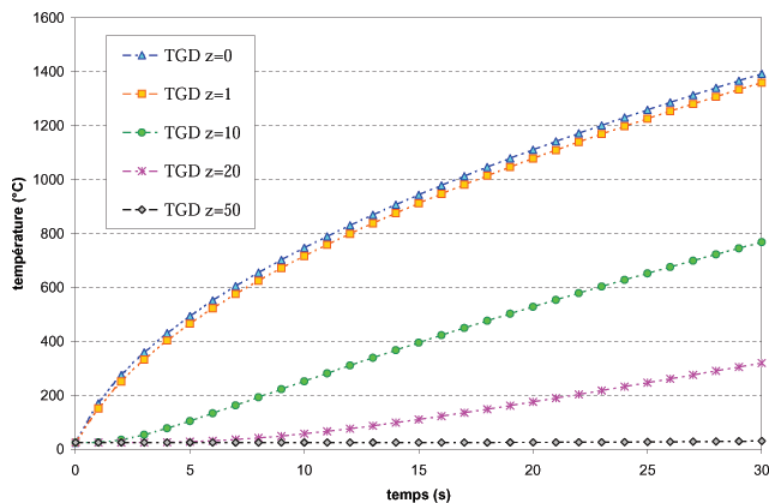


FIG. 2.25 – Evolution de la thermique TGD pour les 5 traceurs avec $h = 2,3\text{ mm}$ et $dt = 1\text{ s}$.

En calculant l'erreur moyenne TGD de chacun de ces capteurs, cet écart est mis en évidence dans le tableau 2.11 :

	$z = 0\text{ mm}$	$z = 1\text{ mm}$	$z = 10\text{ mm}$	$z = 20\text{ mm}$	$z = 50\text{ mm}$
Erreur TGD	32%	40%	65%	53%	2,68%
Erreur max TGD	24%	30%	36%	30%	2,6%

TAB. 2.11 – Pourcentages de l'erreur moyenne TGD (2.24) avec $h = 2,3\text{ mm}$.

A présent, poursuivons cette comparaison en introduisant les solutions numériques GS asynchrone des codes Forge2[®] et Forge3[®] ainsi que celles de R2sol[®] et Thercast[®]. Ces diverses solutions numériques et analytiques sont mises en évidence sur les figures 2.26 (pour $z = 1mm$) et 2.27 (pour $z = 10mm$ et $z = 20mm$). On voit clairement que le schéma TGD n'est pas du tout approprié pour ce type de simulation : c'est le plus éloigné des courbes analytiques et des courbes numériques 2D (R2sol[®] et Forge2[®]) et 3D (Forge3[®] et Thercast[®]). Sachant que la diffusion thermique est uniaxiale (suivant l'axe des z), on ne peut envisager l'hypothèse du rajout d'une dimension (passage d'un calcul bidimensionnel à un cas calcul tridimensionnel) qui soit à l'origine de la mauvaise estimation de la température avec la version TGD "forgeage".

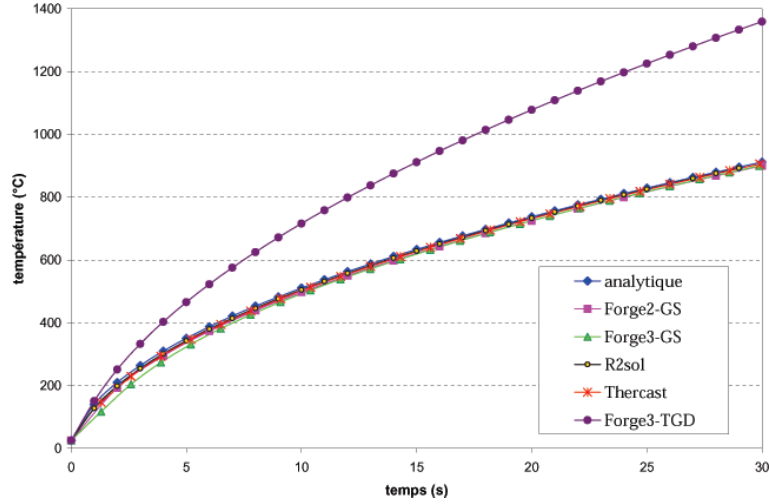


FIG. 2.26 – Evolution de la température du traceur situé à $z = 1mm$ pour $h = 2,3mm$ et $dt = 1s$.

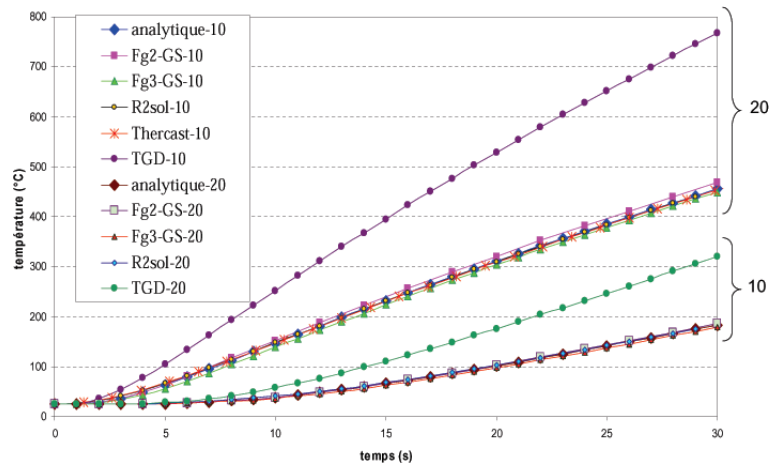


FIG. 2.27 – Evolution de la température pour les traceurs situés à $z = 10mm$ et $z = 20mm$.

D'ailleurs, à la vue de ces résultats, on pourra se contenter pour la suite, de faire une étude comparative uniquement avec la solution exacte et l'approche GS asynchrone de Forge3[®].

En comparant seulement la méthode GS asynchrone de Forge3[®] et le TGD à la solution analytique (toujours sur les figures 2.26 et 2.27), il s'avère que la méthode GS asynchrone donne une estimation très précise du champ de température avec des temps de calculs très acceptables, tandis que le TGD est nettement moins précis avec des temps de calculs beaucoup plus importants (cf tableau 2.12).

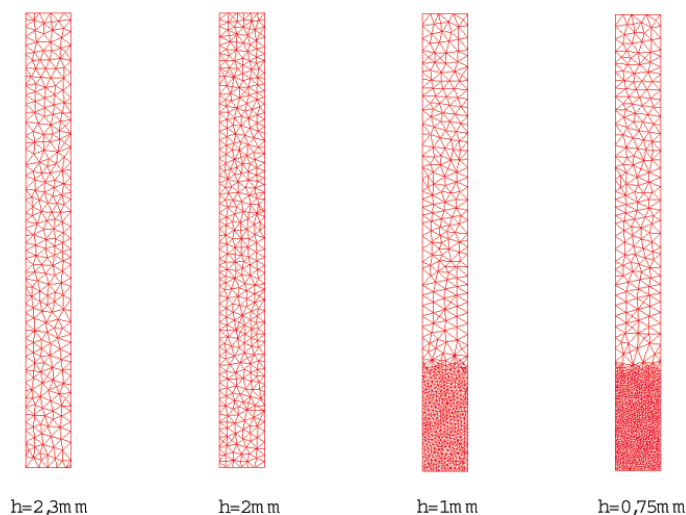
$[0, 30s]$	G S asynchrone	T G D
CPU	80 s	8 min
Erreur $z=1mm$	3,8%	40%
Erreur $z=10mm$	4,1%	65%
Erreur $z=20mm$	3,2%	53%

TAB. 2.12 – Comparaison des temps de calculs et des pourcentages de l'erreur moyenne TGD.

Ces résultats quelque peu surprenants sont appuyés par ceux obtenus par [D'Alvise 2002], arrivant aux mêmes conclusions au cours d'une simulation plus courte (temps total de 2s).

- Solution numérique : convergence du schéma TGD

Les résultats du test de flux imposé ne sont guère satisfaisants avec cette taille de maille moyenne ($h = 2,3 mm$). C'est pourquoi, nous évaluons la sensibilité du schéma TGD au raffinement du maillage. Pour cela, considérons quatre maillages non structurés, de plus en plus fins, ayant respectivement une taille de maille h moyenne de l'ordre de $2,3 mm$, $2 mm$, $1 mm$ et $0,75 mm$ (figure 2.28 et tableau 2.13).

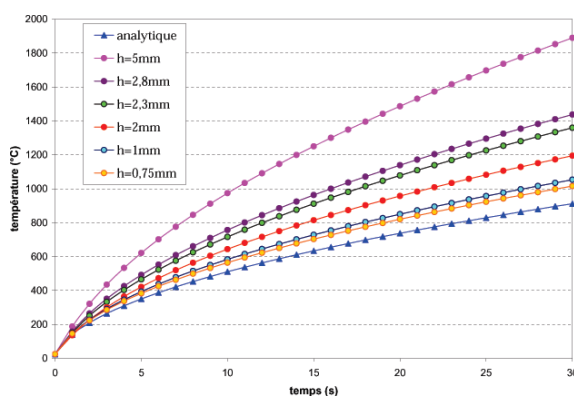
FIG. 2.28 – De gauche à droite, maillages de la barre de plus en plus raffinés avec $h = 2,3 mm$, $h = 2 mm$, $h = 1 mm$ et $h = 0,75 mm$.

	$h = 2,3 mm$	$h = 2 mm$	$h = 1 mm$	$h = 0,75 mm$
nombre de noeuds	2092	3046	5783	7335
nombre d'éléments	7393	11188	24050	29698

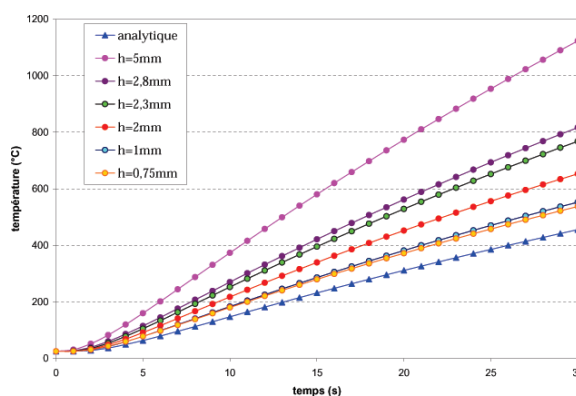
TAB. 2.13 – Caractéristiques des maillages.

Pour chacun de ces maillages, on s'intéresse au comportement de la solution uniquement avec le deuxième et le troisième traceurs qui, rappelons-le, sont situés à $1 mm$ et $10 mm$ de la paroi soumise à flux constant. Les divers tracés peuvent se visualiser sur la figure 2.29.

Le même comportement qu'en température imposée est observé : plus le maillage est fin, plus l'écart entre la solution numérique et la solution exacte est faible (figure 2.29), et donc plus l'erreur TGD diminue (figure 2.30) et plus le temps de calcul est important (cf tableau 2.14).

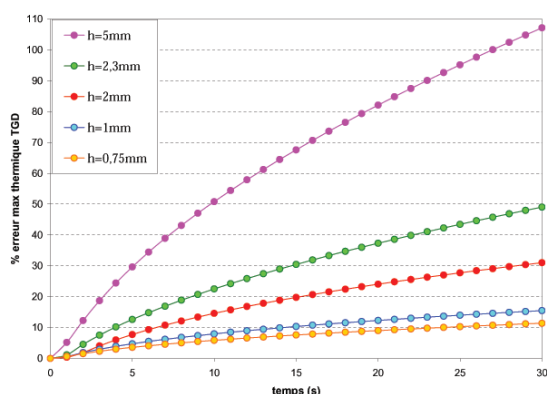


(a) évolution thermique du second traceur situé à 1 mm du bord

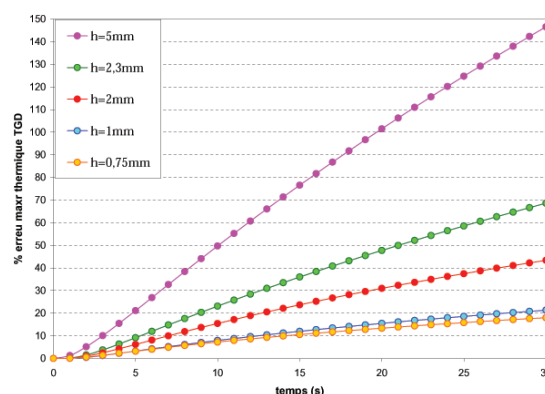


(b) évolution thermique du troisième traceur situé à 10 mm du bord

FIG. 2.29 – Etude de la sensibilité du schéma TGD en fonction de la taille de maille.



(a) noeud situé à 1 mm du bord



(b) noeud situé à 10 mm du bord

FIG. 2.30 – Evolution de l'erreur TGD en fonction de la taille de maille.

	$h = 5mm$	$h = 2,3mm$	$h = 2mm$	$h = 1mm$	$h = 0,75mm$
CPU TGD	23s	8min	19min	3h	7h25
erreur max $z = 1mm$	65%	29%	19%	9,8%	7,2%
erreur max $z = 10mm$	76%	36%	23%	12%	10%

TAB. 2.14 – Temps de calculs et évaluation de l'erreur maximale (2.25) du TGD.

- Sensibilité du schéma TGD par rapport à la valeur du flux imposé Φ_{imp}

À présent, on souhaite établir le comportement de la solution numérique TGD en fonction des valeurs croissantes du flux imposé. Bien évidemment, plus le flux Φ_{imp} sera grand, plus le choc thermique sera violent et plus le réchauffement dans la pièce sera rapide et important.

On vient de voir qu'avec un flux $\Phi_{imp} = 10^6 W.m^{-2}$, la méthode TGD n'est pas bien adaptée : elle est très éloignée de la solution exacte avec un réchauffement, non réaliste, beaucoup trop important. Nous allons tester l'influence de la valeur du flux imposé sur la précision de la solution.

Pour cela, considérons un maillage de taille uniforme $h = 2mm$, un capteur situé directement sur le bord régulé thermiquement (c'est à dire à $z = 0mm$) et faisons varier la valeur de Φ_{imp} entre 10 et 1 000 000 $W.m^{-2}$. Comme on pouvait s'y attendre, le réchauffement est considérable avec les valeurs maximales du flux (figure 2.31).

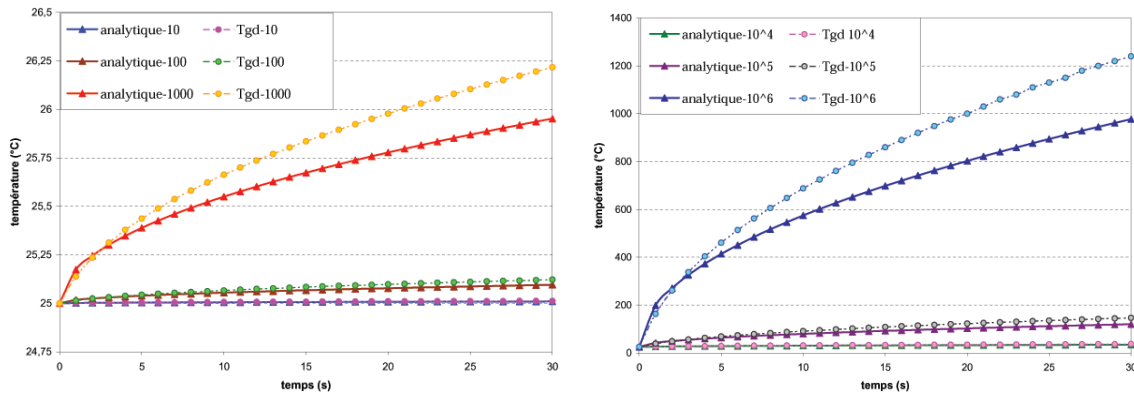


FIG. 2.31 – Evolution de la température TGD pour le capteur situé à $z = 0mm$ en fonction de la valeur de Φ_{imp} ($h = 2mm$).

En traçant l'évolution au cours du temps de l'erreur maximale de ce capteur (figure 2.32), on se rend compte que l'erreur augmente normalement avec la valeur du flux imposé Φ_{imp} , en passant d'une valeur infiniment petite (0,006%) pour $\Phi_{imp} = 10 W.m^{-2}$ à une erreur très conséquente (15,7%) pour $\Phi_{imp} = 10^6 W.m^{-2}$. De plus, un petit pic est observé sur la courbe de l'erreur moyenne pendant les premiers instants de la simulation, découlant d'une estimation moins précise de la température TGD sur le premier incrément que sur les deux suivants.

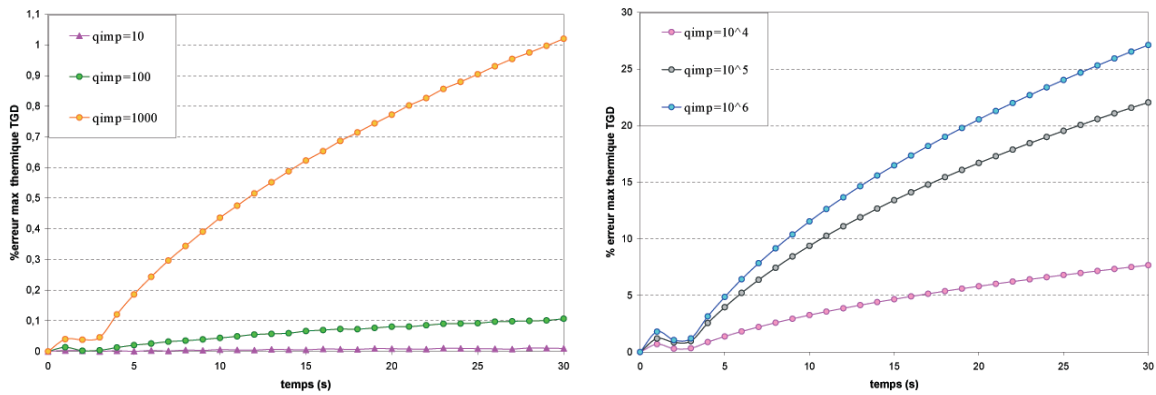


FIG. 2.32 – Evolution de l'erreur TGD maximale pour le capteur $z = 0mm$ en fonction de Φ_{imp} .

Par contre, les temps de calculs sont quasiment les mêmes pour tous ces tests, avoisinant les 18min.

- Conclusions

A la suite de ces divers résultats numériques en condition de flux imposé, nous retrouvons les mêmes inconvénients de la méthode TGD déduits du test en température imposée, à savoir :

- * des temps de calculs trop importants, causés par le caractère explicite du schéma,
- * et une grande sensibilité aux maillages.

Pour une taille de maille identique $h = 1\text{ mm}$ et pour un capteur situé à $z = 10\text{ mm}$, on remarque que l'erreur TGD (2.24) pour le cas de flux imposé (22%) est indiscutablement beaucoup plus importante que l'erreur obtenue sur le cas de température imposée (3%). Par conséquent, nous en arrivons à la même conclusion que [D'Alvise 2002] : même si la tendance générale des courbes ressemble à celle de la solution analytique, la méthode TGD n'est pas appropriée pour résoudre un cas en flux imposé, avec une mauvaise estimation du calcul du flux qui entraîne une évaluation incorrecte et imprécise du champ de température. Il s'avère donc, pour le moment, que la méthode GS asynchrone est la plus adaptée, en terme de précision et de temps de calculs, pour résoudre ce type de conditions aux limites.

2.2.1.5 Etude bibliographique comparative

En vue de conforter l'ensemble des résultats numériques obtenus sur des cas analytiques, nous dressons, dans ce paragraphe, une étude comparative du schéma TGD à partir de divers modèles numériques présentés au cours du premier chapitre.

a) Par rapport aux méthodes stabilisées

Le schéma Taylor Galerkin Discontinu possède les **avantages** suivants :

↪ Le choix d'interpolation de bas degré conduit à la résolution d'un **système local explicite**, élément par élément.

↪ Grâce à son développement de Taylor explicite, il ne nécessite pas de résoudre de gros systèmes linéaires.

↪ Contrairement à certaines méthodes stabilisées, il est **consistant**. Il n'a pas tendance à dénaturer la solution puisqu'il ne possède aucun terme de stabilisation.

↪ Il est capable de traiter **simultanément** des termes de convection et de diffusion dans l'équation de la chaleur (notamment si on s'intéresse au remplissage d'un moule en injection des polymères [Pichelin 1998, Batkam 2002]).

b) Par rapport à l'approche Galerkin Standard

[Pichelin-Coupez 1999] ont testé le schéma TGD sur des problèmes à convection dominante et sur des problèmes à diffusion pure :

- Dans le cas d'un transport pur ou d'une convection dominante, cette méthode élimine les problèmes d'instabilités rencontrées par les approches standards. Ces résultats sont d'autant plus satisfaisants qu'aucun terme de stabilisation n'est introduit et que l'ordre d'interpolation retenu est minimal.

- Pour les problèmes de choc thermique en diffusion pure, le schéma présente de bonnes propriétés de stabilité dans des configurations (pas de temps et maillages) où les approches Galerkin standard génèrent des oscillations; ces propriétés étant mises en évidence en comparant avec des solutions analytiques.

A ce titre, deux exemples peuvent être énumérés. Le premier a été étudié par [Pichelin 1998] dans le cas du refroidissement statique d'une plaque d'épaisseur $2e$ et de grandes dimensions latérales (figure 2.33(a)). Le second test est un cas classique du refroidissement d'une barre en température imposée.

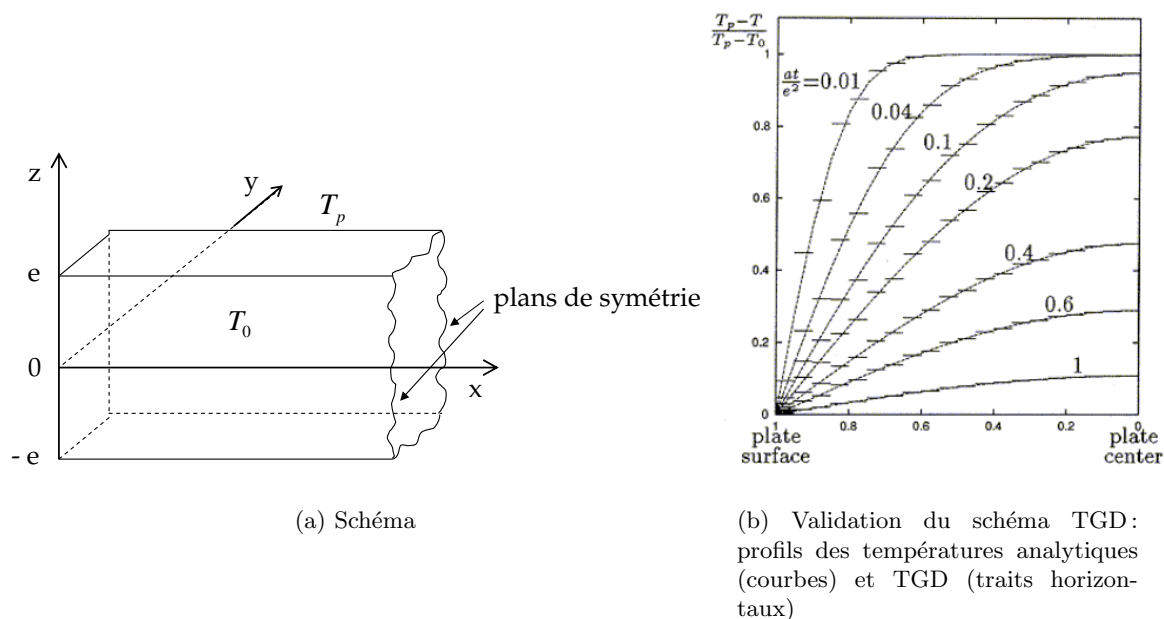


FIG. 2.33 – Refroidissement d'une plaque sur ses deux parois latérales [Pichelin-Coupez 1999].

La figure 2.33(b) établit la comparaison entre la solution analytique [Agassant et al. 1996] et la solution numérique TGD, tandis que la figure 2.34 compare l'évolution thermique par l'approche GS au schéma TGD, avec des résultats très encourageants.

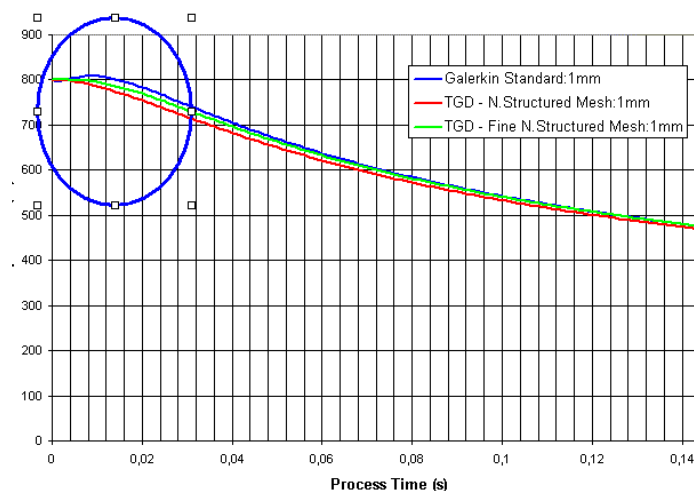
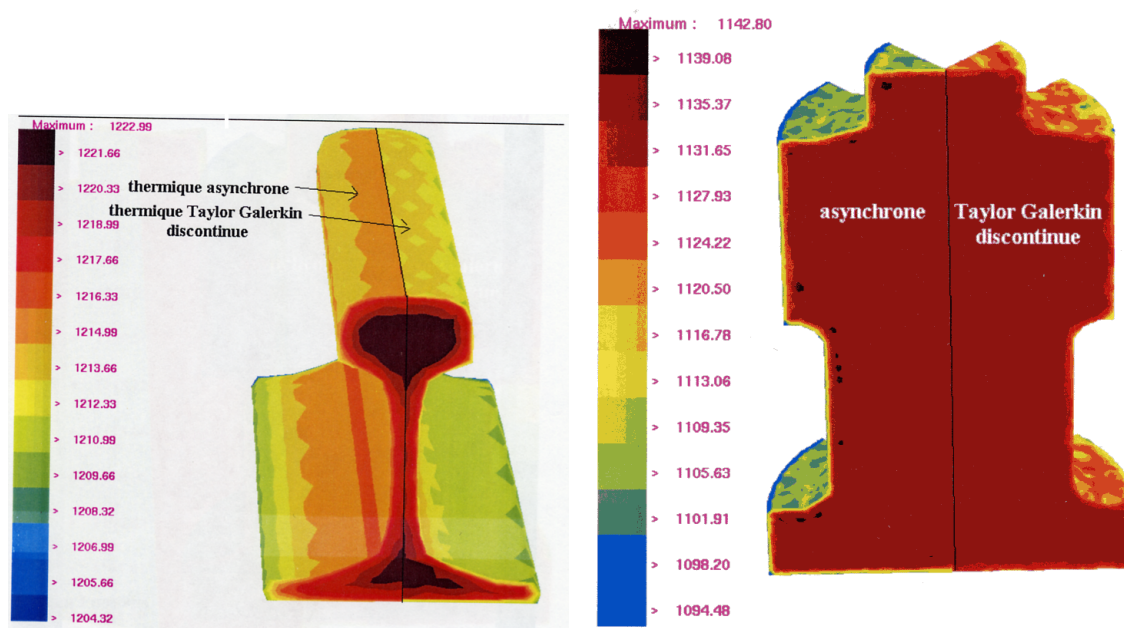


FIG. 2.34 – Test de température imposée : comparaison entre l'approche GS et le schéma TGD [D'Alvise 2002].

c) Par rapport à l'approche Galerkin Standard asynchrone

Nous pouvons citer deux applications 3D traitées par [Aliaga 2000] au cours de l'étude de la trempe de pièces forgées en vue de comparer le modèle TGD à celui de la thermique asynchrone. Il s'avère que la méthode TGD se révèle plus efficace pour résoudre le problème de trempe où des phénomènes très violents de chocs thermiques sont loin d'être rares.

- La première application concerne le refroidissement d'un rail initialement à la température de 950°C . Comme on peut le visualiser sur la figure 2.35(a) qui dresse une comparaison entre la méthode GS asynchrone qui introduit une diffusion artificielle et le schéma TGD, aucune oscillation thermique n'est apparue. Toutefois, les températures "asynchrones" sont plus faibles que celles obtenues avec le TGD.



(a) Calcul thermique d'un rail

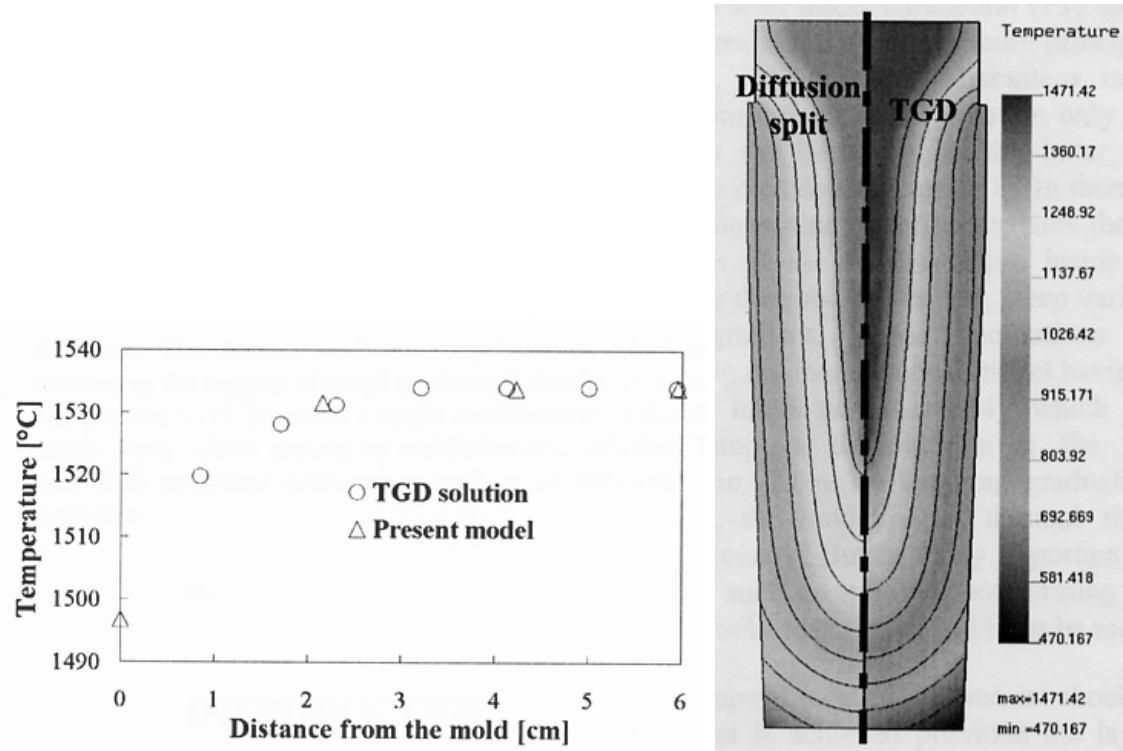
(b) Calcul thermique d'une pièce massive

FIG. 2.35 – A gauche la thermique asynchrone et à droite la thermique TGD [Aliaga 2000].

- La deuxième application est plus sévère avec le refroidissement d'une pièce très massive. Le maillage utilisé atteint 100 000 éléments bien qu'il faudrait une taille de maille 50 fois plus petite pour résoudre correctement la thermique. Le pas de temps asynchrone est 150 fois plus grand que le pas de temps réel pour un refroidissement maximal de 10°C par incrément de calcul. La figure 2.35(b) montre les résultats obtenus entre la thermique asynchrone et TGD. Seul le calcul via la thermique asynchrone présente quelques endroits de choc thermique...

d) Par rapport à la méthode de diffusion fractionnée

Cette fois-ci, il s'agit de modéliser la coulée d'un lingot d'acier, à la température initiale de 1534°C . Toutes les données de la simulation sont énumérées dans [Fachinotti 2004]. Pour ce cas complexe, la méthode GS s'avère complètement inefficace avec la présence d'oscillations non physiques pouvant atteindre les 320°C . Par contre, comme en témoigne la figure 2.36, il y a un bon accord entre les résultats TGD et ceux de la diffusion partitionnée, présentée au premier chapitre (§ 1.2.4). La méthode de diffusion n'est pas plus précise que le schéma TGD mais juste plus rapide.

(a) Température dans le lingot à 1,1s dans la coupe $z = 1,6m$

(b) Calcul thermique dans le lingot après 2h de solidification

FIG. 2.36 – Comparaison entre la méthode TGD et la méthode de diffusion fractionnée [Fachinotti 2004].

Bref, dans tous les cas que nous venons de présenter, les résultats TGD obtenus sont très satisfaisants illustrant ainsi la capacité du schéma à traiter de forts chocs thermiques malgré le faible ordre d'interpolation, tout en absorbant naturellement le choc thermique.

2.2.1.6 Bilan général

a) Avantages du TGD

→ Le schéma TGD muni de l'élément fini mixte P_0/P_0 conduit à un schéma local, stable, facile à implémenter. Il ne nécessite pas de résoudre de gros systèmes linéaires.

→ Un développement de Taylor à l'ordre $n = 3$ est suffisant pour obtenir la stabilité du schéma, avec une estimation satisfaisante de la solution. Il est donc inutile de pousser le développement de Taylor en prenant une valeur de n trop grande qui aurait tendance à augmenter le temps de calculs sans améliorer significativement la solution du modèle.

→ Choisir un maillage structuré ou non structuré, à taille de maille identique, n'influe guère sur la solution numérique, en donnant des résultats très similaires.

→ Comparée aux formulations Galerkin standard, la méthode TGD est efficace pour les équations fortement convectives (puisque'elle ne génère pas d'instabilités) et pour les équations diffusives pures (puisque le problème du choc thermique est relativement bien traité).

↪ Par rapport à toutes les méthodes présentées jusqu'ici, elle ouvre de meilleures perspectives avec des utilisations nombreuses et très variées. Sachant qu'elle donne des résultats très encourageants pour le traitement du changement de phase (trempe, remplissage de lingostière...), elle pourrait être étendue à la prise en compte de phénomènes physiques importants en remplissage de moules, à l'exemple du couplage thermique moule/polymère dans une approche 3D directe, la modélisation d'éventuels inserts (injection/surmoulage) ou d'autres polymères (injection multi-matières).

b) Limitations du TGD

Cependant, elle présente quelques **inconvénients**, non négligeables :

↪ Son caractère explicite lui impose d'utiliser des petits pas de temps (thermiques) afin de conserver la stabilité du schéma; entraînant ainsi des temps de calculs très élevés. En particulier, pour des simulations complexes avec couplage thermomécanique, [Batkam-Coupez 2001] se rendent compte que le temps de calculs avoisine les trois semaines pour des maillages à 15000 noeuds et 80000 éléments.

↪ Le schéma est beaucoup trop sensible aux tailles de mailles : il induit des erreurs importantes sur des maillages grossiers à cause de son interpolation P_0 . Des maillages suffisamment fins sont donc nécessaires mais cela contribue à accroître le temps de calcul.

↪ Pour des situations extrêmes de maillages très anisotropes, une divergence de la solution peut également être observée [Batkam 2002].

↪ Le traitement de conditions aux limites en flux ne semble pas consistant avec la méthode en obtenant une mauvaise estimation de la température et de meilleurs résultats avec une formulation Galerkin standard. Cela nous amène donc à la conclusion suivante : pour simuler l'évolution de la température d'une barre soumise à un flux constant, la résolution Galerkin munie de la thermique asynchrone semble pour l'instant la mieux appropriée (en terme de précision et de temps de résolution). D'ailleurs [D'Alvise 2002] aboutit à ce même raisonnement lors de l'étude du processus de soudage avec frottement inertiel.

A ce stade de notre travail, on se demande si l'on doit encore raffiner le maillage et du coup faire accroître le temps de calcul ou privilégier une direction de remaillage. Un choix plus judicieux serait d'améliorer le calcul du flux \vec{q} ; ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

En dépit de ses limitations, il semblerait que le schéma TGD explicite muni de l'élément fini mixte constant P_0/P_0 soit le plus apte à répondre à nos besoins. En effet, il ne faut pas oublier qu'il est très performant sur des cas extrêmes de chocs thermiques, omniprésents au cours des procédés de forgeage et de trempe ! Pour toutes ces raisons, nous avons retenu cette technique de calcul comme base de notre modèle, développé ci-après.

Nous souhaitons que le nouveau modèle soit capable d'absorber les chocs thermiques à moindre coût, tout en donnant une estimation plus précise sur le calcul du flux. De plus, nous envisagerons d'y introduire un caractère implicite afin d'avoir une plus grande souplesse dans le choix du pas de temps, tout en conservant de bonnes propriétés de stabilité.

2.2.2 Le modèle Galerkin Discontinu Implicite : Gdimp

Dans cette section, nous présentons notre premier modèle numérique pour résoudre de manière plus efficace et pertinente le problème thermique mixte instationnaire considéré (2.3). Ce schéma est en fait une amélioration de la méthode TGD, avec comme base du modèle spatial l'approche Galerkin Discontinue (introduite par [Lesaint-Raviart 1974]) munie d'éléments finis mixtes discontinus P_0/P_0 en température/gradient de température.

Avec ce nouveau schéma, nous souhaitons conserver tous les avantages d'une formulation mixte et d'une interpolation de bas degré, tout en s'affranchissant des principales limitations du TGD afin qu'il puisse mieux rendre compte des effets thermiques et thermomécaniques au cours des procédés de forgeage et de traitements thermiques.

Pour la discrétisation spatiale, nous utilisons une formulation originale, développée par [Batkam-Coupez 2001], basée sur l'élément fini mixte P_0/P_0^+ en température/gradient de température, qui confère une meilleure stabilité au schéma résultant et une meilleure précision pour estimer le gradient de température, et donc le flux de chaleur. L'intégration temporelle, quant à elle, a pour objectif de prendre en compte des pas de temps plus élevés (et donc de réduire le coût des calculs) avec l'introduction du schéma d'Euler implicite. C'est ainsi que nous appelons notre modèle numérique, le modèle Galerkin Discontinu Implicite noté Gdimp [Pelissou-Massoni 2003].

2.2.2.1 Schéma de discrétisation spatiale : l'élément fini mixte P_0/P_0^+

Le modèle spatial utilise une technique de Galerkin Discontinu qui rappelons-le consiste de façon générale à interpoler les inconnues du problème (la température et le flux) par des fonctions polynômiales pour lesquelles aucune condition de continuité n'est exigée aux interfaces entre les éléments (cf chapitre 1 § 1.3.5).

L'élément fini mixte P_0/P_0 qui servait de base au schéma TGD ne sera plus retenu pour le modèle Gdimp. En effet, nous choisissons d'utiliser une formulation plus locale, construite à partir de l'interpolation P_0/P_0 : c'est la formulation P_0/P_0^+ [Batkam-Coupez 2001] dont le principe est expliqué ci-dessous.

a) Interpolation mixte de bas degré

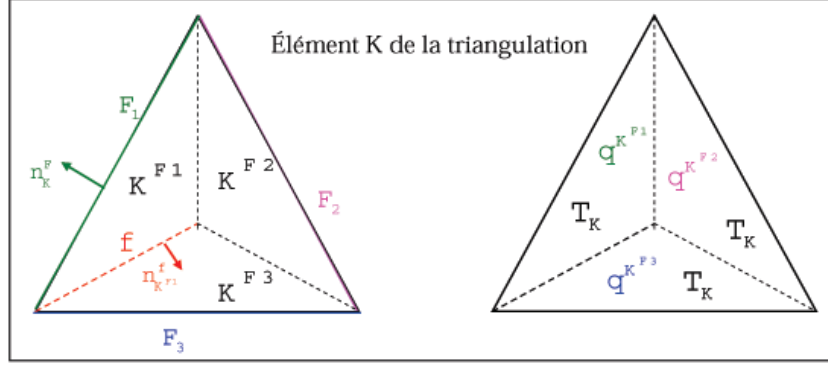
Considérons Ω_h une triangulation du domaine Ω décomposée en K simplexes telle que

$$\Omega = \bigcup_{K \in \Omega_h} K \quad \text{et } h \text{ une taille de maille caractéristique.}$$

• Décomposition d'un élément K de la triangulation : notations

A partir d'une interpolation P_0/P_0 , nous construisons une formulation P_0/P_0^+ plus localisée. Le principe de cette nouvelle méthode consiste à subdiviser chaque élément K de la triangulation en 4 pour le cas tridimensionnel ou en 3 pour le cas bidimensionnel (soit en D si nous nommons D la dimension topologique du maillage), puis d'appliquer sur chaque sous-élément K^F de la subdivision un schéma P_0/P_0 .

Plus précisément, le champ de température T reste constant sur chaque élément K . Par contre, le flux de chaleur local \vec{q}_K sur un élément K sera obtenu en additionnant les valeurs \vec{q}_{K^F} de chaque sous-élément K^F (figure 2.37). On supposera, de plus, que le flux reste le même entre deux sous-éléments partageant une face extérieure de l'élément K .

FIG. 2.37 – Notations 2D sur l'élément K décomposé en 3 sous-éléments K^F [Batkam 2002].

La figure 2.37 et le tableau 2.15 dressent les notations relatives à l'élément K et à un sous-élément K^F .

K	: élément quelconque du maillage ($K \subset \Omega_h$),
F	: face "externe" de l'élément K tel que $F \in \partial K$,
\vec{n}_K^F	: vecteur normal (orienté sortant) à l'élément K à travers la face F ,
$\mathcal{K}(F)$: ensemble des éléments du maillage partageant la même face F ,
K^F	: sous-élément de K partageant la face F avec K ($K^F \subset K$),
f	: face "interne" à K tel que $f \in \partial K^F$,
$\vec{n}_{K^F}^f$: normale sortante à une face f d'un sous-élément K^F ,
T_K	: température (constante) de l'élément K (et de ses sous-éléments K^F associés),
\vec{q}_{K^F}	: flux de chaleur (constant) d'un sous-élément K^F de l'élément K ,
$\mathcal{F}(\Omega_h)$: ensemble des faces (internes et externes) de la triangulation Ω_h .

TAB. 2.15 – Notations.

Pour construire la formulation faible discrète du problème mixte thermique (2.3), nous avons besoin au préalable de définir des espaces d'interpolation pour les deux inconnues du problème.

- Espace d'approximation pour la température

On choisit d'interpoler le champ de température T par des fonctions constantes par élément. Soit T_h la projection de T , $T_h \in W_h$ espace d'approximation pour la température, défini par :

$$W_h = \{ w_h \in L^2(\Omega), w_{h|_K} \in P_0(K) \quad \forall K \in \Omega_h \}.$$

\Rightarrow La température de chaque sous-élément de l'élément K aura comme valeur celle de la température T_K de l'élément K (figure 2.38).

- Espace d'approximation pour le flux

Sur chaque sous-élément K_F , on fait l'hypothèse d'une interpolation constante du flux \vec{q} . L'**approximation** résultante sur l'élément K est qualifiée de " \mathbf{P}_0^+ ". Le choix d'interpolation pour le flux \vec{q} se traduit par : soit \vec{q}_h la projection P_0^+ de \vec{q} , $\vec{q}_h \in F_h^+$ espace d'approximation pour le flux de chaleur avec :

$$F_h^+ = \{ v_h \in [L^2(\Omega)]^d, v_{h|_{K^F}} \in P_0(K^F) \quad \forall K^F \in K \quad \forall K \in \Omega_h \}.$$

\Rightarrow Le flux de chaleur local \vec{q}_K d'un élément K est obtenu en additionnant les valeurs \vec{q}_{K^F} de

chaque sous-élément.

- Notation : l'élément P_0/P_0^+

L'élément mixte en T/\vec{q} ainsi construit est appelé P_0/P_0^+ et se visualise sur la figure 2.38.

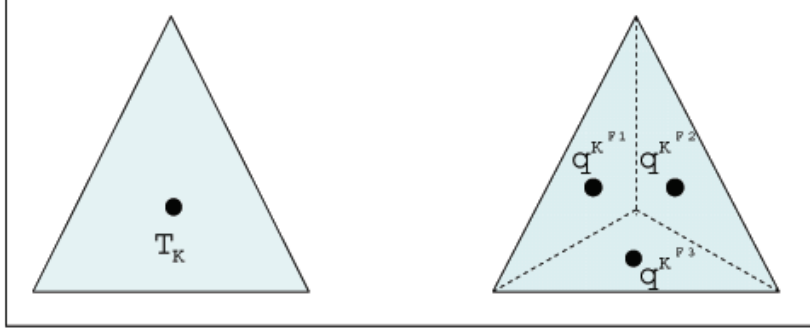


FIG. 2.38 – L'élément fini mixte P_0/P_0^+ en température/flux de chaleur [Batkam 2002].

L'idée de cette nouvelle méthode est de pouvoir construire un schéma stable, facile à implémenter et encore plus local que le schéma utilisant des éléments finis P_0/P_0 . C'est ainsi que [Batkam 2002] envisage que le saut de température T_h soit nul à travers les faces "internes" f de l'élément K et que le saut de flux \vec{q}_h soit nul à travers les faces "externes" F de K .

b) Formulation faible

On est maintenant en mesure d'écrire la formulation faible discrète associée au problème thermique instationnaire :

Trouver $T_h \in W_h$ et $\vec{q}_h \in F_h^+$ tels que :

$$\begin{cases} \langle \rho c \frac{dT_h}{dt} + \text{div } \vec{q}_h, \varphi \rangle_\Omega = (\dot{w}, \varphi)_\Omega & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_h) \\ \langle \vec{q}_h + k \vec{\nabla} T_h, \vec{\varphi} \rangle_\Omega = 0 & \forall \vec{\varphi} \in [\mathcal{D}(\Omega_h)]^d \end{cases} \quad (2.29)$$

A partir de (2.29), nous utilisons le schéma de résolution éléments finis. Comme pour l'interpolation constante P_0/P_0 , les difficultés résident dans l'expression du flux de chaleur sur l'élément P_0/P_0^+ ainsi que dans la discrétisation du terme de diffusion $\text{div } \vec{q}_h$. Dans ce qui suit, nous décrivons les principales étapes du calcul du gradient discret et de la divergence discrète. Pour de plus amples détails, le lecteur pourra directement se référer aux travaux de [Batkam 2002].

c) Formulation discrète : gradient discret

La formulation du gradient discret provient du calcul de la forme discrète éléments finis associée à la loi de Fourier $\langle \vec{q}_h + k \vec{\nabla} T_h, \vec{\varphi} \rangle_\Omega$.

- Terme $\langle k \vec{\nabla} T_h, \vec{\varphi} \rangle_\Omega$

En utilisant le théorème de la divergence, on a pour tout $\vec{\varphi} \in [\mathcal{D}(\Omega_h)]^d$:

$$\begin{aligned}
\langle k \vec{\nabla} T_h, \vec{\varphi} \rangle_{\Omega} &= - \int_{\Omega} k T_h \operatorname{div} \vec{\varphi} \, d\Omega = - \int_{\Gamma} k T_h \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, ds \\
&= - \sum_{K \subset \Omega_h} \sum_{K^F \subset K} \int_{\Gamma_{K^F}} k T_h|_{K^F} \vec{\varphi} \cdot \vec{n}_K^F \, ds
\end{aligned} \tag{2.30}$$

puisque T_h est constante sur le sous-élément K^F de valeur : $T_h|_{K^F} = T_{K^F} = T_K$.

A ce stade, comme pour le schéma P_0/P_0 , nous introduisons le saut de la température T_h et des poids attribués maintenant sur les sous-éléments K^F de la triangulation (et non plus sur les éléments K de la triangulation) :

- le saut de T_h à travers la face interne f du sous-élément K^F suivant la normale $\vec{n}_{K^F}^f$ orientée extérieurement à K^F (figure 2.39). Ce saut, noté $[T_h]_{K^F}^f$, est défini comme suit :

$$[T_h]_{K^F}^f = \sum_{K^{F'} \subset \mathcal{K}(F)} T_h|_{K^{F'}} \vec{n}_{K^{F'}}^f \cdot \vec{n}_{K^F}^f \tag{2.31}$$

où $\mathcal{K}(F)$ représente le domaine formé par les sous-éléments de la triangulation Ω_h qui partagent la même face interne f .

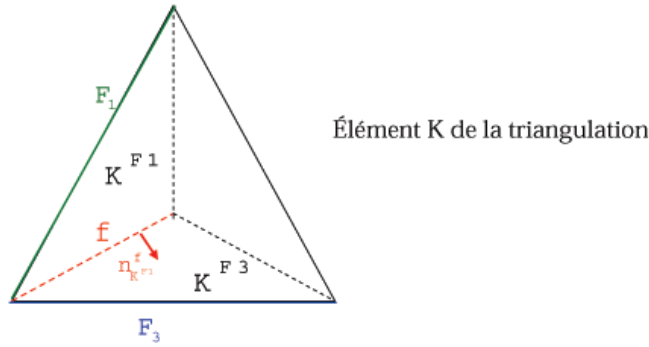


FIG. 2.39 – Calcul du saut à l'interface de deux sous-éléments K^{F1} et K^{F3} .

- et les coefficients $\alpha_{K^F}^f$ qui désignent des poids attribués aux sous-éléments K^F adjacents à la même face interne f et qui vérifient :

$$\sum_{K^F \subset \mathcal{K}(F)} \alpha_{K^F}^f = 1 \tag{2.32}$$

Avec ces notations, l'expression précédente (2.30) se réécrit :

$$\langle k \vec{\nabla} T_h, \vec{\varphi} \rangle_{\Omega} = - \sum_{K \subset \Omega_h} \sum_{K^F \subset K} k \alpha_{K^F}^F [T_h]_K^F \int_F \vec{n}_K^F \cdot \vec{\varphi} \, ds \tag{2.33}$$

- Terme $(\vec{q}_h, \vec{\varphi})_{\Omega}$

$$\begin{aligned}
(\vec{q}_h, \vec{\varphi})_{\Omega} &= \int_{\Omega} \vec{q}_h \cdot \vec{\varphi} \, d\Omega = \sum_{K \subset \Omega_h} \sum_{K^F \subset K} \int_{K^F} \vec{q}_h \cdot \vec{\varphi} \, d\Omega \quad \forall \vec{\varphi} \in [\mathcal{D}(\Omega_h)]^d \\
&= \sum_{K \subset \Omega_h} \sum_{K^F \subset K} \vec{q}_{K^F} \cdot \int_{K^F} \vec{\varphi} \, d\Omega
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Puisque $\vec{q}_h \in F_h^+$, c'est à dire \vec{q}_h est constant sur le sous-élément K^F de valeur \vec{q}_{K^F} .

• Bilan de la discrétisation du flux de chaleur

En combinant (2.33) et (2.34), on arrive à l'expression :

$$\sum_{K \subset \Omega_h} \sum_{K^F \subset K} \left\{ \vec{q}_{K^F} \cdot \int_{K^F} \vec{\varphi} d\Omega - k \alpha_{K^F}^F [T_h]_K^F \int_F \vec{n}_K^F \cdot \vec{\varphi} ds \right\} = 0 \quad (2.35)$$

Cette équation étant valable pour tout $\vec{\varphi} \in [\mathcal{D}(\Omega_h)]^d$, on choisit $\varphi_i = Id_{K^F} \forall i \in [1, d]$. Autrement dit :

$$\boxed{\vec{q}_{K^F} = \frac{1}{|K^F|} k \alpha_{K^F}^F [T_h]_K^F |F| \vec{n}_K^F} \quad (2.36)$$

Remarque 2.6 Détermination du volume d'un sous-élément K^F .

En prenant naturellement le barycentre de chaque élément K de la triangulation Ω_h comme point de la subdivision, il en résulte que tous les sous-éléments K^F de cette subdivision auront même volume $|K^F|$ avec :

$$|K^F| = \frac{|K|}{D} \quad \forall K^F \subset K \quad \text{et } D \text{ la dimension topologique du maillage} \quad (2.37)$$

Remarque 2.7 Détermination des poids $\alpha_{K^F}^F$.

Deux cas peuvent se présenter en fonction de la nature de la face F qui peut être une face interne ($F \notin \partial\Omega$) ou bien une face frontière ($F \in \partial\Omega$).

- Pour une face interne, en considérant $K(F)$ le voisin de K partageant la même face F , le poids s'exprime par :

$$\alpha_{K^F}^F = \frac{|K|}{|K| + |K(F)|} \quad (2.38)$$

- En revanche, pour une face frontière, on pourra toujours définir $\alpha_{K^F}^F = 1$ ou étendre l'expression (2.38) en considérant un élément fictif à l'extérieur du domaine ayant F comme face adjacente à l'élément K et tel que son volume $|K(F)|$ soit nul. On aura donc :

$$\alpha_{K^F}^F = \frac{|K|}{|K| + |K(F)|} = \frac{|K|}{|K|} = 1 \quad (2.39)$$

En prenant en compte l'expression des poids $\alpha_{K^F}^F$ et celle du volume du sous-élément K^F , on aboutit à la formulation locale (2.40) correspondant au calcul du flux de chaleur discret \vec{q}_{K^F} sur le sous-élément K^F :

$$\boxed{\forall K^F \subset K, \forall K \subset \Omega_h, \quad \vec{q}_{K^F} = k [T_h]_K^F \frac{D |F| \vec{n}_K^F}{|K| + |K(F)|}} \quad (2.40)$$

Remarque 2.8 Pour une face frontière, $|K(F)| = 0$; ce qui simplifie l'expression (2.40).

d) Formulation discrète : divergence discrète

Il faut maintenant exprimer la forme discrète associée au terme de conservation de l'énergie $< \rho c \frac{dT_h}{dt} + \text{div}(\vec{q}_h), \varphi >_\Omega$ dans le système (2.29).

En d'autres termes, cela revient à calculer la divergence discrète du flux de chaleur sur un élément K à l'aide du schéma P_0/P_0^+ .

Sachant que la quantité de chaleur échangée (par diffusion) à travers un élément K correspond à la somme des quantités de chaleur échangées à travers les sous-éléments K^F de K , la divergence discrète du flux de chaleur sur un élément K s'écrit :

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{q}_K = \sum_{F \in \partial K} \nabla \cdot \vec{q}_{K^F}} \quad (2.41)$$

Autrement dit, il faut d'abord calculer la divergence discrète sur un sous-élément quelconque K^F de l'élément K qui se met sous la forme :

$$\nabla \cdot \vec{q}_{K^F} = - \left(\sum_{f \in \partial K, f \neq F} \frac{1}{2} [\vec{q}_h]_{K^F}^f \cdot |f| \vec{n}_{K^F}^f \right) * \frac{1}{|K^F|} \quad (2.42)$$

En effet, par construction du schéma P_0/P_0^+ , les sauts de flux sont nuls à travers les faces f qui sont aussi des faces "externes" F de l'élément K . Par conséquent, seules les faces "internes" vont éventuellement "voir" des sauts non nuls dans le calcul de la divergence discrète. Ces sauts sont répartis de manière *équivalente* entre les deux sous-éléments voisins K^F et $K^F(f)$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{le saut du flux } \vec{q}_h \text{ à travers la face } f \text{ défini par } [\vec{q}_h]_{K^F}^f = \vec{q}_{K^F} - \vec{q}_{K^F(f)} \\ \text{et} \\ \text{les poids } \beta_{K^F}^f \text{ tels que } \sum_{K^F \subset \mathcal{K}(f)} \beta_{K^F}^f = 1 \text{ avec } \beta_{K^F}^f = \frac{1}{2} \text{ pour } \forall f \text{ face interne} \end{array} \right.$$

Grâce à l'obtention de certaines propriétés remarquables de ce schéma [Batkam 2002], nous en déduisons la forme simplifiée suivante :

$$\nabla \cdot \vec{q}_K = \sum_{F \in \partial K} \vec{q}_{K^F} \cdot \frac{|F|}{|K^F|} \vec{n}_K^F \quad \text{avec} \quad |K^F| = \frac{|K|}{D} \quad (2.43)$$

$$\text{Soit} \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{q}_K = \frac{D}{|K|} \sum_{F \in \partial K} \vec{q}_{K^F} \cdot \vec{n}_K^F |F|} \quad (2.44)$$

Finalement, en injectant l'expression (2.40) dans (2.44) et en remplaçant D par ω , nous obtenons l'expression de la divergence discrète du flux sur l'élément K tel que :

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{q}_K = \frac{\omega}{|K|} \sum_{F \in \partial K} k [T_h]_K^F \frac{D |F|^2}{|K| + |K(F)|}} \quad (2.45)$$

Remarque 2.9 ω est un paramètre numérique introduit dans la formulation discrète. Ce paramètre dépend en réalité de la forme des éléments (dimension du maillage, mode de triangulation,...) et admet une valeur optimale $\omega = \frac{1}{d}$ (en notant d la dimension de l'espace) permettant d'améliorer la précision du schéma. [Batkam 2002] le nomme "le facteur de formes".

e) Bilan de la discrétisation spatiale

En définitive, en reportant (2.40) et (2.45) dans (2.29), et en supposant une interpolation constante par élément du second membre \dot{w} dans (2.29), le schéma de Galerkin Discontinu pour des éléments finis mixtes P_0/P_0^+ en température/flux permet d'écrire et donc de résoudre localement le problème suivant :

Trouver T_K et \vec{q}_{K^F} tels que pour tout $K^F \subset K$ et pour tout $K \subset \Omega_h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho c)_K \frac{dT_K}{dt} = - \frac{\omega}{|K|} \sum_{F \in \partial K} \vec{q}_{K^F} \cdot \vec{n}_K^F |F| + \dot{w}_K \quad (a) \\ \vec{q}_{K^F} = k [T_h]_K^F \frac{D |F| \vec{n}_K^F}{|K| + |K(F)|} \quad (b) \end{array} \right. \quad (2.46)$$

En injectant l'expression de \vec{q}_{K^F} dans l'équation discrète de la chaleur; nous obtenons une écriture réduite de la discrétisation spatiale: c'est la formulation éléments finis associée au problème thermique instationnaire fort (2.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } T_K \text{ tel que pour tout } K \subset \Omega_h : \\ (\rho c)_K \frac{dT_K}{dt} = - \frac{\omega}{|K|} \sum_{F \in \partial K} k [T_h]_K^F \frac{D |F|^2}{|K| + |K(F)|} + \dot{w}_K \end{array} \right. \quad (2.47)$$

Le problème (2.47) s'exprime alors uniquement à l'aide d'une seule inconnue le champ de température T_K sur l'élément K . C'est sous cette écriture que le problème thermique est résolu.

Remarque 2.10 La décomposition en sous-éléments sur laquelle est basée la discrétisation du gradient de température n'apparaît pas explicitement dans le bilan discrétisé (2.47). Le fait qu'elle soit implicitement contenue dans les équations va donc permettre d'enrichir le schéma P_0/P_0^+ sans introduire de nouveaux termes.

f) Comparaison des schémas P_0/P_0 et P_0/P_0^+

Partant de la même formulation mixte à deux champs T/\vec{q} du problème thermique instationnaire (2.3), l'expression du problème discret avec des éléments P_0/P_0^+ sera donc nettement simplifiée par rapport au schéma P_0/P_0 : le problème discret P_0/P_0^+ a la possibilité de s'exprimer uniquement avec le champ T , contrairement au problème discret P_0/P_0 qui a besoin d'estimer le gradient de température (et donc le flux de chaleur) avant d'en déduire le champ de température.

La comparaison entre les schémas de discrétisation P_0/P_0 (§ 2.2.1.1) et P_0/P_0^+ met en évidence le caractère plus local de l'estimation de la température T sur l'élément K à l'aide de la deuxième discrétisation. Plus précisément, le calcul de la température T_K provenant d'un schéma P_0/P_0 nécessite de faire intervenir des informations sur les deux couches d'éléments voisins autour de K alors que la détermination de la température T_K pour un schéma P_0/P_0^+ repose uniquement sur les données des éléments voisins de K .

On parle alors de "formulation voisins des voisins" (figure 2.40 à droite) pour l'élément fini mixte P_0/P_0 et de "formulation voisins" (figure 2.40 à gauche) pour l'élément fini mixte P_0/P_0^+ .

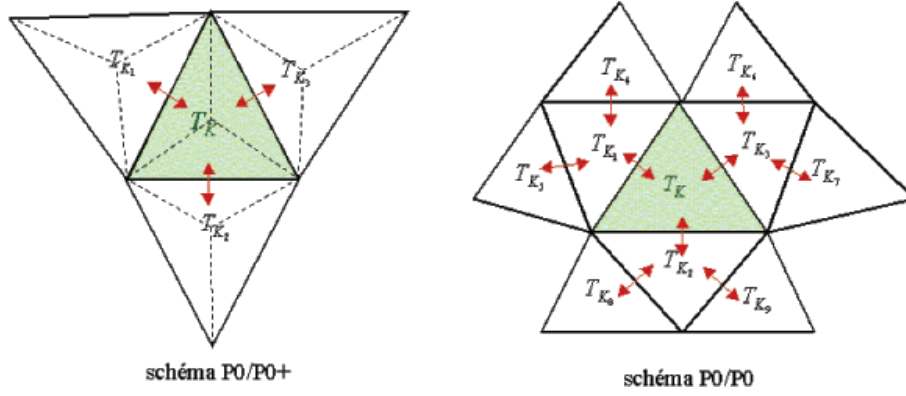


FIG. 2.40 – Comparaison des schémas P_0/P_0 et P_0/P_0^+ : contributions locales de l'élément courant K [Batkam-Coupez 2001].

Remarque 2.11 Résolution globale du problème (2.47).

Pour chaque élément K de la triangulation, une contribution de $(1+D^2)$ termes dans la matrice serait nécessaire avec le schéma le P_0/P_0 alors que seulement une contribution de $(1+D)$ termes dans la matrice avec le schéma P_0/P_0^+ .

2.2.2.2 Prise en compte des conditions aux limites thermiques et du terme source

Pour que le problème thermique mixte instationnaire soit correctement posé, nous avons supposé plusieurs types de conditions aux limites thermiques sur l'ensemble du bord du domaine Ω , noté Γ . Dans cette partie, nous regardons comment ces conditions sont gérées par le schéma de discrétisation spatiale P_0/P_0^+ . La possibilité d'écrire le problème discret à l'aide d'une seule inconnue (le champ T) va permettre de faciliter l'écriture ainsi que la gestion des diverses conditions aux limites.

Rappelons juste la convention adoptée (figure 2.41) :

"Le volume d'un élément ou d'un sous-élément (fictif) en dehors du domaine Ω et voisin d'un élément frontière est nul :

$$|K(F)| = 0 \quad \forall F \in \partial K \cap \Gamma \quad \forall K \in \Omega "$$

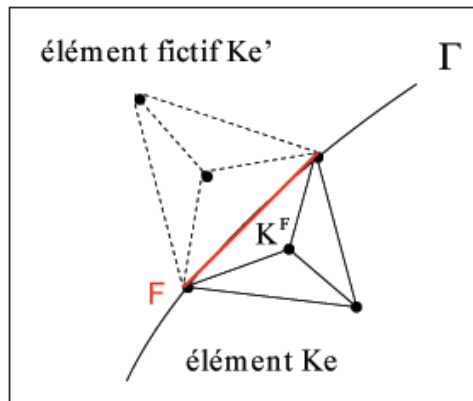


FIG. 2.41 – Élément externe fictif adjacent à une face frontière F .

a) Température imposée sur Γ_1 : $T = T_{imp}$

La discrétisation de la condition de Dirichlet s'écrit de manière évidente :

$$T_{K(F)} = T_{imp} \quad \forall F \in \partial K \cap \Gamma_1 \quad \forall K \in \Omega \quad (2.48)$$

Autrement dit, le saut devient :

$$[T_h]_K^F = T_K - T_{K(F)} = T_K - T_{imp} \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (2.49)$$

Donc, en prenant en compte une condition de température imposée, le bilan discret (2.47) est équivalent à :

$$\boxed{(\rho c)_K \frac{dT_K}{dt} = - \frac{\omega}{|K|} \sum_{F \in \Gamma_1} k (T_K - T_{imp}) \frac{D |F|^2}{|K|}} \quad (2.50)$$

b) Flux imposé sur Γ_2 : $\Phi_{imp} = \vec{q} \cdot \vec{n}$

Le terme de sommation $\sum_{F \in \partial K}$ dans l'expression (2.46.a) va se simplifier en prenant en compte cette condition et en se réduisant à :

$$2 \Phi_{imp} |F| \quad \text{sur } \Gamma_2$$

En effet, en considérant un élément virtuel dans le milieu en vis-à-vis (figure 2.41), la condition de flux imposé s'écrit :

$$\Phi_{imp} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \left(\vec{q}_{K_e} + \vec{q}_{K'_e} \right) \quad (2.51)$$

De plus, pour discrétiser cette condition de Neumann, on part de la relation (2.46.b) écrite sur l'élément K_e et sur l'élément K'_e :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{q}_{K^F} \cdot \vec{n}_{K^F} = k [T_h]_K^F \frac{D |F|}{|K| + |K(F)|} \quad \forall F \in \partial K \cap \Gamma_2 \quad \forall K \in \Omega \\ \vec{q}_{K^{F'}} \cdot \vec{n}_{K^{F'}} = k [T_h]_{K'}^F \frac{D |F|}{|K'| + |K(F)|} \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Autrement dit, la condition (2.51) se reformule par :

$$\begin{aligned} \Phi_{imp} &= \frac{1}{2} \left[k [T_h]_K^F \left(\frac{D |F|}{|K| + |K(F)|} + \frac{D |F|}{|K'| + |K(F)|} \right) \right] \\ \Leftrightarrow [T_h]_K^F &= \frac{2 \Phi_{imp}}{k} \left(\frac{|K| + |K(F)|}{D |F|} + \frac{|K'| + |K(F)|}{D |F|} \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Et donc, avec la convention, (2.53) se simplifie et (2.47) est équivalent à :

$$\boxed{(\rho c)_K \frac{dT_K}{dt} = - \frac{\omega}{|K|} \sum_{F \in \Gamma_2} 2 \Phi_{imp} |F|} \quad (2.54)$$

Pour les conditions de transferts thermiques pièce/outil (conduction) ou encore pièce/air (convection/rayonnement), la même démarche du rajout d'un élément fictif est utilisée.

c) Conduction sur Γ_3 : $\vec{q} \cdot \vec{n} = h_{cd}(T - T_{out})$

La discrétisation de la condition de conduction conduit à l'expression pour $\forall F \in \partial K \cap \Gamma_3$ $\forall K \in \Omega$:

$$T_K - T_{K(F)} = \frac{2 h_{cd}}{k} (T - T_{out}) \left[\frac{|K| + |K(F)|}{D |F|} + \frac{|K'| + |K(F)|}{D |F|} \right] \quad (2.55)$$

Ce qui revient à écrire pour le terme de sommation $\sum_{F \in \partial K}$ dans (2.46.a) :

$$2 h_{cd} (T - T_{out}) |F| \quad \text{sur } \Gamma_3$$

C'est à dire :

$$\boxed{(\rho c)_K \frac{dT_K}{dt} = - \frac{\omega}{|K|} \sum_{F \in \Gamma_3} 2 h_{cd} (T - T_{out}) |F|} \quad (2.56)$$

d) Convection/rayonnement sur Γ_4 : $\vec{q} \cdot \vec{n} = h(T - T_{ext})$

De même, le terme de sommation $\sum_{F \in \partial K}$ pour des transferts type convection/rayonnement va se réduire à :

$$2 h (T - T_{ext}) |F| \quad \text{sur } \Gamma_4$$

avec comme formulation du saut de température pour $\forall F \in \partial K \cap \Gamma_4$ $\forall K \in \Omega$:

$$T_K - T_{K(F)} = \frac{2 h}{k} (T - T_{ext}) \left[\frac{|K| + |K(F)|}{D |F|} + \frac{|K'| + |K(F)|}{D |F|} \right] \quad (2.57)$$

Par conséquent, la formulation discrète (2.47) est équivalente :

$$\boxed{(\rho c)_K \frac{dT_K}{dt} = - \frac{\omega}{|K|} \sum_{F \in \Gamma_4} 2 h (T - T_{ext}) |F|} \quad (2.58)$$

e) Prise en compte de la déformation

L'estimation du terme source $\dot{\omega}_K$ sur l'élément K est la même que celle utilisée pour le schéma TGD "forgeage".

f) Réécriture du bilan de la discrétisation spatiale

Maintenant que nous avons pris en compte les diverses conditions aux limites, nous sommes en mesure de réécrire le bilan de la discrétisation spatiale " P_0/P_0^+ " du problème thermique mixte instationnaire, en introduisant les quatre expressions discrètes (2.50), (2.54), (2.56) et (2.58). Plus exactement, ce rajout va se faire au niveau du terme de sommation sur l'ensemble des faces

de l'élément K sachant que ces faces peuvent aussi bien être internes ($F = f$ avec $F \in \Omega$) que frontières (appartenir à une partie du bord de Ω) :

$$\begin{aligned} \sum_{F \in \partial K} &= \sum_{F \in \partial K \text{ internes}} + \sum_{F \in \partial K \text{ frontières}} \\ &= \sum_{F \in \partial K, F=f} + \sum_{F \in \partial K \cap \Gamma_1} + \sum_{F \in \partial K \cap \Gamma_2} + \sum_{F \in \partial K \cap \Gamma_3} + \sum_{F \in \partial K \cap \Gamma_4} \end{aligned}$$

En complétant l'équation (2.47), nous en déduisons la formulation générale de la discrétisation spatiale " P_0/P_0^+ " du problème thermique mixte instationnaire :

Trouver T_K tel que pour tout $K \subset \Omega_h$:

$$\begin{aligned} (\rho c)_K \frac{dT_K}{dt} &= - \frac{\omega}{|K|} \left\{ \sum_{F \in \partial K, F=f} k_F [T_h]_K^F \frac{D |F|^2}{|K| + |K(F)|} + \sum_{F \in \Gamma_2} 2 \Phi_{imp} |F| \right. \\ &+ \sum_{F \in \Gamma_1} k_F (T_K - T_{imp}) \frac{D |F|^2}{|K|} + \sum_{F \in \Gamma_3} 2 h_{cd} (T - T_{out}) |F| \\ &\left. + \sum_{F \in \Gamma_4} 2 h (T - T_{ext}) |F| \right\} + \dot{w}_K \end{aligned} \quad (2.59)$$

Après avoir décrit les conditions aux limites, on s'intéresse à présent à la résolution numérique de ce problème. Pour cela, nous introduisons un schéma d'intégration temporelle à la formulation discrète complète (2.59).

2.2.2.3 Discrétisation temporelle : schéma d'Euler Implicite

Plusieurs méthodes existantes dans la littérature permettent de résoudre l'équation (2.59). Cependant, nous voulons que le schéma d'intégration temporelle choisi puisse préserver une certaine stabilité et prendre en compte des pas de temps plus grands, que ceux qui nous étaient permis avec la méthode TGD explicite . C'est pourquoi, notre choix s'est tout naturellement porté vers le schéma classique d'Euler implicite.

a) Schéma d'Euler implicite

Le schéma d'Euler implicite appliqué au problème (2.47) nous amène à l'écriture du système linéaire suivant, ayant pour inconnues les températures $T_K^{t+\Delta t}$:

$$\boxed{(\rho c)_K \frac{T_K^{t+\Delta t} - T_K^t}{\Delta t} = - \frac{\omega}{|K|} \sum_{F \in \partial K} k_F (T_K^{t+\Delta t} - T_{K(F)}^{t+\Delta t}) \frac{D |F|^2}{|K| + |K(F)|} + \dot{w}^{t+\Delta t}} \quad (2.60)$$

Pour chaque élément K_i , la combinaison du schéma temporel (2.60) à la prise en compte des diverses conditions aux limites (2.59) nous conduit à l'expression suivante, sachant que F_{ij} est la face interne commune à l'élément K_i et K_j :

$$\begin{aligned}
& |K_i| \rho_i c_i \frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t} + \omega \sum_{j \text{ vois internes}} k_{i/j} (T_i^{t+\Delta t} - T_j^{t+\Delta t}) \frac{D |F_{ij}|^2}{|K_i| |K_j|} \\
& + \omega \sum_{F \in \partial K_i, F \in \Gamma_1} k_i (T_i^{t+\Delta t} - T_{imp}) \frac{D |F|^2}{|K_i|} + \omega \sum_{F \in \partial K_i, F \in \Gamma_2} 2 \Phi_{imp} |F| \\
& + \omega \sum_{F \in \partial K_i, F \in \Gamma_3} 2 h_{cd} (T_i^{t+\Delta t} - T_{out}) |F| + \omega \sum_{F \in \partial K_i, F \in \Gamma_4} 2 h (T_i^{t+\Delta t} - T_{ext}) |F| \\
& = |K_i| \dot{w}_{K_i}^{t+\Delta t}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Soit sous la forme d'un système linéaire symétrique à $(nbelt)$ lignes et $(nbelt)$ inconnues, $nbelt$ étant le nombre d'éléments composant le maillage Ω_h :

$$[A] \{ T^{t+\Delta t} \} = \{ B \} \tag{2.62}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l}
T^{t+\Delta t} \text{ représente le vecteur inconnu des températures aux éléments, à l'instant } t + \Delta t \\
A_{ii} = |K_i| \frac{\rho_i c_i}{\Delta t} + \omega \sum_{j \text{ vois}} k_{i/j} \frac{D |F_{ij}|^2}{|K_i| + |K_j|} + \omega \sum_{F \in \Gamma_1} k_i \frac{D |F|^2}{|K_i|} + \omega \sum_{F \in \Gamma_3} 2 h_{cd} |F| \\
\quad + \omega \sum_{F \in \Gamma_4} 2 h |F| \\
A_{ij} = - \omega k_{i/j} \frac{D |F_{ij}|^2}{|K_i| + |K_j|} \quad i \neq j \\
B_i = |K_i| \frac{\rho_i c_i}{\Delta t} T_i^t + \omega \sum_{F \in \Gamma_1} k_i T_{imp} \frac{D |F|^2}{|K_i|} - \omega \sum_{F \in \Gamma_2} 2 \Phi_{imp} |F| + \omega \sum_{F \in \Gamma_3} 2 h_{cd} T_{out} |F| \\
\quad + \omega \sum_{F \in \Gamma_4} 2 h T_{ext} |F| + |K_i| \dot{w}_{K_i}^{t+\Delta t}
\end{array} \right.$$

b) Méthode de résolution numérique : décomposition de type Jacobi

Afin de sélectionner une méthode de résolution adaptée au système linéaire issu de (2.61), nous regardons dans un premier temps si la matrice (A) possède des propriétés spécifiques.

Grâce au caractère très local du schéma P_0/P_0^+ , il s'avère qu'elle présente la particularité d'être largement creuse. En effet, nous avons vu que chaque élément de la triangulation apporte une contribution de $(1 + D)$ termes dans la matrice (A) . De plus c'est une matrice à diagonale dominante; autrement dit, elle ne présente aucun terme nul sur la diagonale.

Pour résoudre le système linéaire (2.62), nous avons choisi d'implémenter la méthode de décomposition de type Jacobi [Ciarlet 1991]. Rappelons brièvement cette technique de résolution.

* La matrice (A) se décompose en $(A) = (D) - (E + F)$

où (D) est une matrice diagonale, (E) et (F) sont respectivement des matrices triangulaires inférieure et supérieure, à diagonale nulle, telles que :

$$\begin{cases} d_{ii} = a_{ii} \\ e_{ii} = 0, & e_{ij} = -a_{ij} & i < j \\ f_{ii} = 0, & f_{ij} = -a_{ij} & i > j \end{cases}$$

* le système matriciel se réécrit $(A)[T] = [B] \Leftrightarrow (D)[T] = (E + F)[T] + [B]$

* On y associe le processus itératif suivant en désignant par $[T]^{(i)}$ une suite convergente vers le vecteur $[T]$:

$$(D)[T]^{(i+1)} = (E + F)[T]^{(i)} + [B] \quad (2.63)$$

* Algorithme de Jacobi :

$[T]^{(0)}$ donné

Pour $i = 1, nbitmax$

Pour $k = 1, N$

$$T_k^{(i+1)} = \frac{1}{A_{kk}} \left(B_k - \sum_{j=1}^{k-1} A_{kj} T_j^{(i)} - \sum_{j=k+1}^N A_{kj} T_j^{(i)} \right)$$

si $(|T_k^{(i+1)} - T_k^{(i)}| \leq \epsilon)$ est vérifiée alors FIN.

Remarque 2.12 *La matrice (A) étant largement creuse, nous avons décidé de nous restreindre à l'utilisation de la méthode de Jacobi. On aurait pu envisager d'utiliser une méthode plus efficace, comme par exemple, la méthode de Gauss-Seidel [Ciarlet 1991], ou encore la méthode de gradient conjugué préconditionné [Ern-Germond 2000]. Comparé avec les méthodes itératives (de Jacobi ou de Gauss-Seidel), l'avantage d'une telle méthode est le gain en temps CPU non négligeable, notamment si l'on doit résoudre de très gros systèmes.*

Nous avons implanté le modèle Gdimp dans la version monodomaine du code éléments finis Forge3[®], tel que nous venons de le décrire dans les paragraphes 2.2.2.1-2.2.2.3. Afin de vérifier la validité et l'efficacité de notre modèle, il est donc nécessaire de l'appliquer à des problèmes simples présentant une solution bien définie.

2.2.2.4 Validation du Gdimp sur des tests purement thermiques : comparaison avec une solution analytique instationnaire

Pour valider le modèle Gdimp, nous reprenons les deux tests "standards" purement thermiques précédemment introduits lors de la validation du schéma TGD (§ 2.2.1.4). Pour chacun de ces tests, une comparaison sera faite entre la solution analytique, les deux modèles numériques (TGD et Gdimp) implantés dans le code Forge3[®] et, quand cela sera possible, la version GS (associée à la thermique asynchrone) qu'utilise actuellement Forge3[®]. La validation du modèle Gdimp n'en sera donc que plus fiable et pertinente.

a) Température imposée sur l'extrémité d'une barre d'acier semi-infinie

Rappelons succinctement les conditions de ce premier test (cf figure 2.4) :

- Température initiale de la barre: $T_0 = 800^\circ C$

- Température imposée sur le plan $z = 0$: $T_{imp} = 25^\circ C$
- Maillage: $h = 2,8 mm$
- Temps de la simulation: $30s$ avec un pas de temps mécanique dt fixé à $1s$
- Données du matériau: $k = 15 W.m^{-1}.K^{-1}$, $\rho = 7800 Kg.m^{-3}$ et $c = 360 J.Kg^{-1}.K^{-1}$

• Solution numérique 3D: visualisation des résultats Gdimp

Maintenir une température constante de $25^\circ C$ sur l'extrémité d'une paroi d'une pièce initialement à $800^\circ C$ va automatiquement entraîner le refroidissement rapide de celle-ci (figure 2.43); et qui plus est, un refroidissement uniaxial (direction des z) mis en évidence sur la figure 2.42 représentant les isovaleurs thermiques du Gdimp.

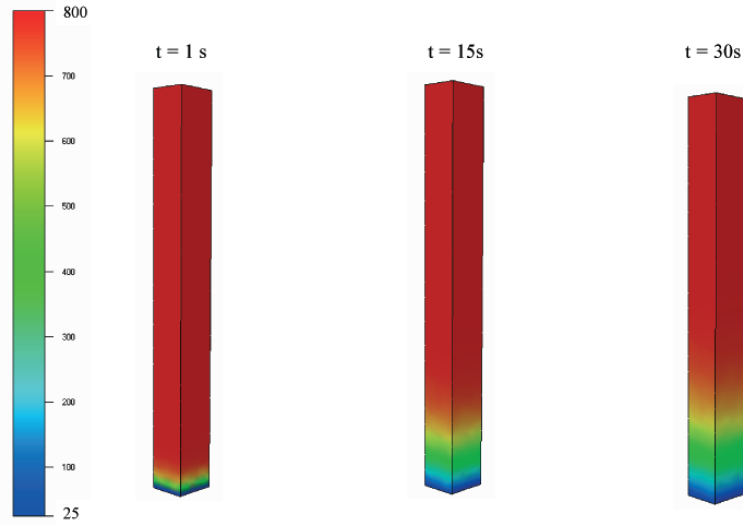


FIG. 2.42 – Isovaleurs de la température au cours de la résolution Gdimp: mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.

Les résultats obtenus sur la figure 2.43 sont très encourageants avec une allure générale des courbes Gdimp sensiblement similaire à celle des solutions analytiques, pour les traceurs localisés à $1mm$, $10mm$ et $20mm$ du bord thermiquement imposé. De plus, le troisième noeud ne s'échauffe plus anormalement en adoptant la résolution Gdimp.

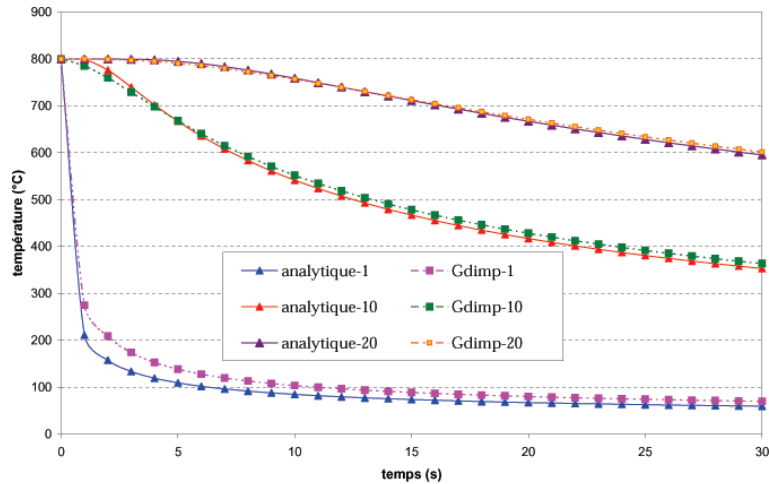


FIG. 2.43 – Evolution de la température des 3 traceurs: comparaison entre la solution analytique et la version Gdimp de Forge3[®]: $h = 2,8mm$ et $dt = 1s$.

Afin d'établir une comparaison entre nos deux modèles numériques discontinus (sur ce test de température imposée), nous avons rajouté, sur la figure 2.44, les évolutions thermiques du TGD pour ces trois capteurs. Il s'avère que le Gdimp est plus performant que le TGD avec des plus faibles écarts avec la solution analytique et un temps de calcul plus court. En effet, on estime approximativement une erreur moyenne Gdimp de 2,2% et 0,5% pour les noeuds situés à 10 et 20mm du bord, en seulement 103s, tandis que 157s sont nécessaires au TGD avec des erreurs plus importantes, de l'ordre de 7% et 3,6%.

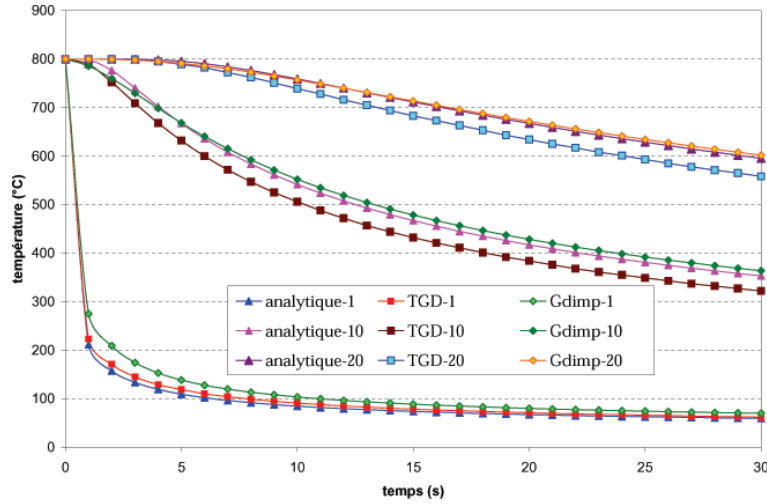


FIG. 2.44 – Test de température imposée : comparaison entre la solution analytique et les diverses solutions numériques TGD et Gdimp de Forge3[®] avec $h=2,8mm$.

Par contre, pendant les premières secondes de la simulation, on peut observer un écart plus important entre la solution exacte et la courbe Gdimp pour le noeud situé en peau (à $z = 1mm$) qui s'affaiblit au cours du temps (figure 2.45). Avec ce maillage moyennement grossier ($h = 2,8mm$), c'est le TGD qui donne de meilleurs résultats, avec seulement 6,3% d'erreur contre 22% avec le Gdimp, pour le capteur en peau.

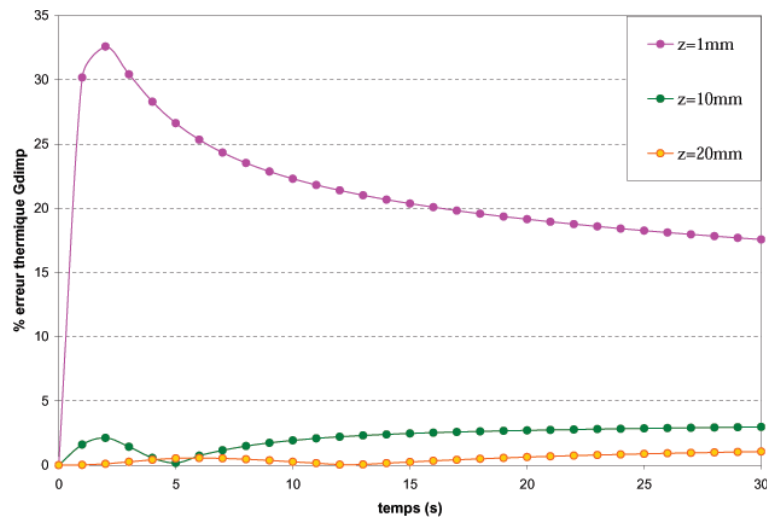


FIG. 2.45 – Evolution de l'erreur moyenne Gdimp pour les 3 traceurs : $h = 2,8mm$ et $dt = 1s$.

- Solution numérique : influence du mode de triangulation

A présent, nous regardons si le schéma Gdimp est sensible au mode de triangulation. Comme précédemment, on considère un maillage structuré et non structuré (formé de tétraèdres à 4 noeuds), ayant tous deux une taille de maille constante de l'ordre de $2,5mm$ (cf p 67).

Comme en témoigne la figure 2.46, la thermique Gdimp reste assez stable vis-à-vis du maillage avec des écarts minimes obtenus entre les courbes structurées et non structurées (pour les deux traceurs $z = 10mm$ et $z = 20mm$) et des temps de calculs très proches (cf tableau 2.16). On peut juste souligner que les résultats provenant du maillage structuré (possédant moins d'éléments) sont meilleurs. Par exemple, pour le premier capteur, l'erreur moyenne estimée est de l'ordre de 0,4% contre 2,6% en non structuré.

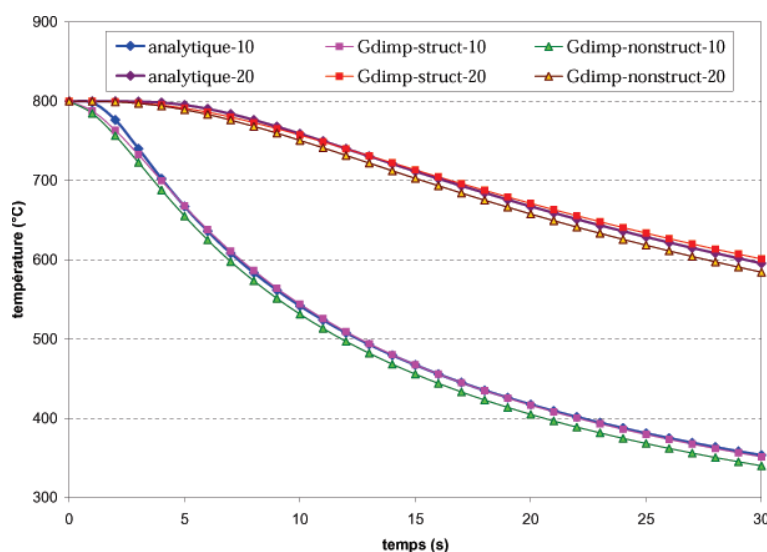


FIG. 2.46 – Test de température imposée : influence du mode de triangulation du maillage sur la solution numérique Gdimp avec $h = 2,5mm$.

⇒ Comme le schéma TGD, le modèle Gdimp permet d'obtenir une estimation quasi-similaire de la température, quel que soit le mode de triangulation choisi, à taille de maille identique. De plus, le Gdimp se révèle plus précis et plus rapide que le TGD (cf tableau 2.16), en lissant correctement le choc thermique.

$[0,30 s]$	MAILLAGE STRUCTURÉ $h = 2,5 mm$	MAILLAGE NON STRUCTURÉ $h = 2,5 mm$
CPU Gdimp	64 s	74 s
% erreur moyen Gdimp $z = 10mm$	0,4%	2,6%
CPU TGD	4 min 25 s	4 min 30 s
% erreur moyen TGD $z = 10mm$	8,3%	6,3%

TAB. 2.16 – Comparaison des temps de calculs et des erreurs pour les schémas Gdimp et TGD.

- Solution numérique : influence du maillage à pas de temps fixé

Sachant que le pas de temps dt de la simulation est fixé à $1s$, nous étudions la sensibilité de la solution numérique Gdimp au raffinement du maillage en prenant quatre tailles de maille de l'ordre de $5mm$, $2,8mm$, $2mm$ et $1mm$.

Sur la figure 2.47, nous avons représenté pour les deux traceurs situés à $10mm$ et $20mm$ les évolutions thermiques Gdimp et analytiques. Cette figure met bien en évidence la sensibilité du modèle Gdimp au raffinement du maillage puisque les solutions numériques convergent d'autant mieux vers la solution exacte que le maillage est fin.

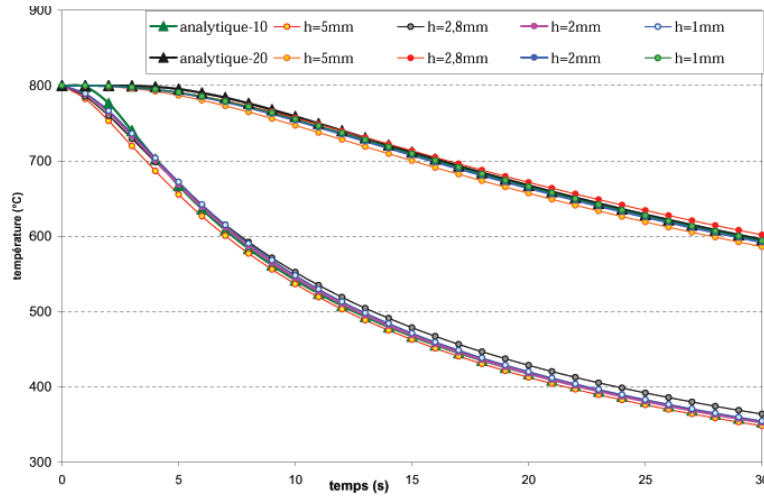
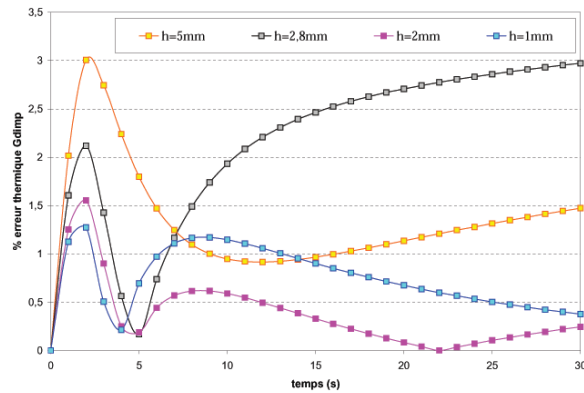


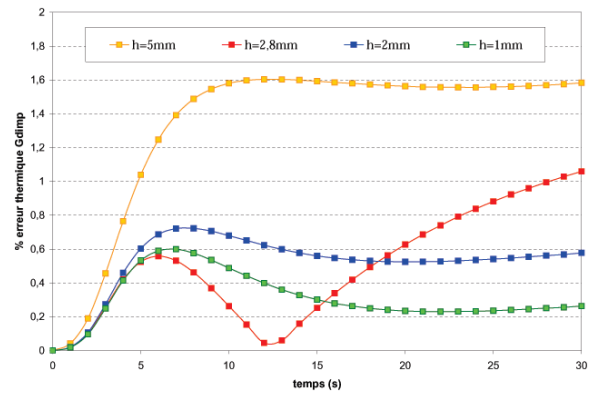
FIG. 2.47 – Evolution thermique Gdimp des 2 traceurs en fonction du maillage raffiné avec $dt = 1s$.

D'autre part, on constate qu'avec n'importe quel maillage (même avec le maillage le plus grossier $h = 5mm$), aucune oscillation non physique de la température ne se produit au cours de la simulation.

En visualisant les courbes de l'erreur Gdimp sur les figures 2.48 et en se référant au tableau 2.17, nous observons un comportement analogue au TGD : "Plus le maillage est fin, plus la solution numérique Gdimp est fiable, avec une diminution de l'erreur aux dépens d'une augmentation des temps de calculs."



(a) capteur situé à $10mm$



(b) capteur situé à $20mm$

FIG. 2.48 – Evolution de l'erreur Gdimp en fonction du raffinement du maillage avec $dt = 1s$.

Si nous comparons ces résultats à ceux précédemment obtenus avec le TGD (cf p 68), indiscutablement la méthode Gdimp se révèle la plus pertinente pour le test de température imposée, même si les deux modèles absorbent naturellement le phénomène de choc thermique. En effet, pour $h = 1mm$ et $z = 10mm$, l'erreur TGD est plus importante avec 3% alors que l'erreur Gdimp est seulement de 0,7%, sans parler du gain de temps lors de la résolution du problème thermique qui est loin d'être négligeable puisque 9min suffisent pour le Gdimp tandis que 3h sont nécessaires au TGD.

$[0,30 s]$	$h = 5 mm$	$h = 2,8 mm$	$h = 2 mm$	$h = 1 mm$
CPU Gdimp	12 s	1 min 45 s	2 min 33 s	8 min 40 s
% erreur Gdimp $z = 10mm$	1,36%	2,2%	0,4%	0,7%
% erreur Gdimp $z = 20mm$	1,38%	0,52%	0,53%	0,32%
CPU TGD	23 s	2 min 17 s	19 min	3 h
% erreur TGD $z = 10mm$	9,3%	7%	2,7%	2,9%
% erreur TGD $z = 20mm$	4,8%	3,6%	1,9%	1,7%

TAB. 2.17 – Comparaison des temps de résolution et des erreurs moyennes pour les schémas TGD et Gdimp.

• Solution numérique : Influence du pas de temps à maillage fixé

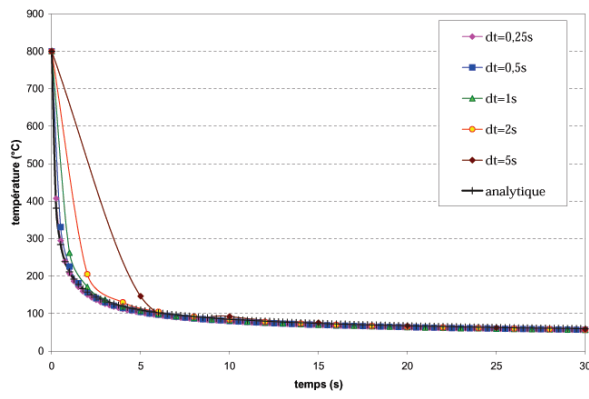
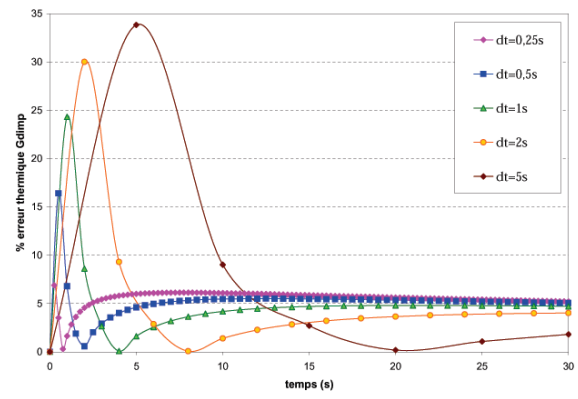
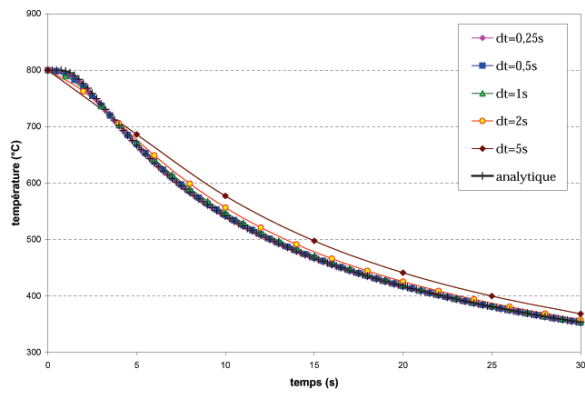
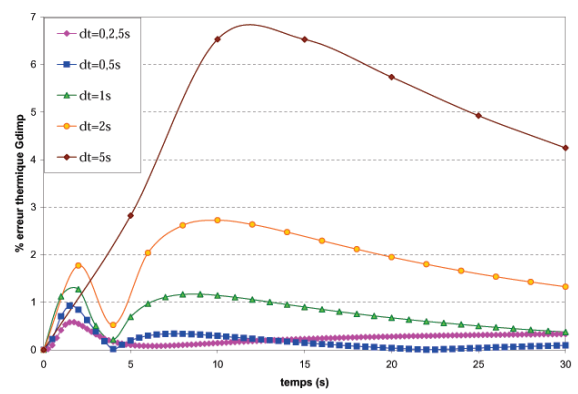
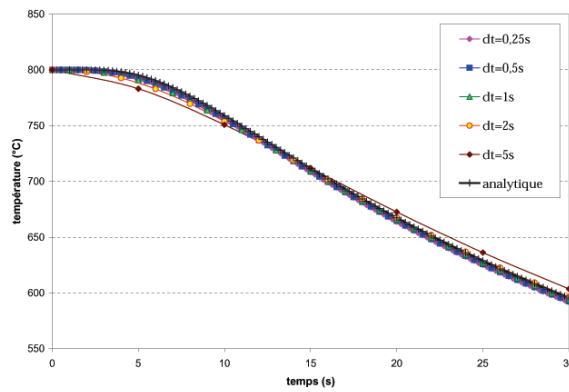
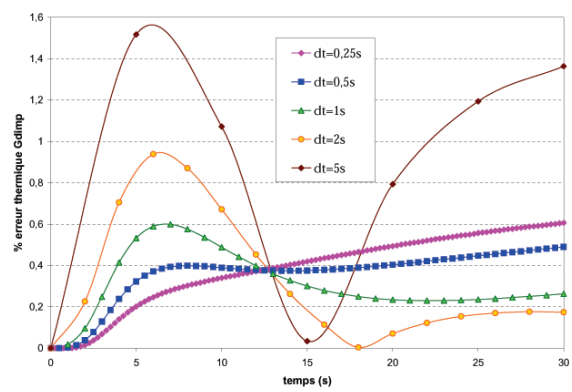
Nous faisons varier le pas de temps (mécanique) dt avec une taille de maille constante à 1 mm et étudions la réponse de la solution numérique Gdimp.

Sur les graphes 2.49(a), 2.49(c) et 2.49(e) , nous avons représenté pour les trois capteurs la solution analytique (avec un pas de temps très petit $dt = 0,25s$) et les solutions numériques Gdimp obtenues avec diverses valeurs du pas de temps. On se rend compte que plus le pas de temps est petit, plus les courbes Gdimp se rapprochent de la solution exacte :

- pour le noeud $z = 1mm$, l'erreur moyenne du Gdimp passe de 8,1% à 5,6%,
- pour le noeud $z = 10mm$, on passe de 5,1% à 0,25%,
- et pour le noeud $z = 20mm$, on passe de 1% à 0,35%.

Bien évidemment le calcul avec le modèle Gdimp sera d'autant plus rapide que le pas de temps dt sera grand (cf tableau 2.18).

D'autre part, avec les plus grandes valeurs de dt (5s et 2s), l'évolution de la température présente une allure générale correcte par rapport à la solution analytique, sans apparition du phénomène du choc thermique sur le troisième noeud, même si elle manque de précision (figures 2.49(b), 2.49(d) et 2.49(f)). En ce qui concerne les plus petits pas de temps (0,5s et 0,25s), la précision est quasiment la même, seule la durée du calcul diffère.

(a) Evolution thermique Gdimp $z = 1mm$ (b) Evolution de l'erreur thermique $z = 1mm$ (c) Evolution thermique Gdimp $z = 10mm$ (d) Evolution de l'erreur thermique $z = 10mm$ (e) Evolution thermique Gdimp $z = 20mm$ (f) Evolution de l'erreur thermique $z = 20mm$ FIG. 2.49 – Influence du pas de temps dt avec $h = 1mm$.

$[0,30 s]$	$dt = 5s$	$dt = 2s$	$dt = 1s$	$dt = 0,5s$	$dt = 0,25s$
CPU	5 min 06 s	6 min 15 s	8 min 40 s	12 min 36 s	20 min

TAB. 2.18 – Comparaison des temps de calculs du modèle Gdimp.

- Conclusions

Ces résultats valident le modèle Gdimp sur le test de température imposée. En effet, aucune oscillation spatio-temporelle non physique de la température n'a été observée, même en modifiant significativement la taille du maillage ou même le pas de temps.

Par comparaison avec le schéma TGD [Pelissou-Massoni 2003], il est indiscutable que le Gdimp est le plus adapté pour résoudre ce type de problèmes diffusifs, avec une estimation beaucoup plus précise de la température et des temps de calculs très rapides.

Par contre, comme pour le TGD, on retrouve une certaine sensibilité du schéma au raffinement du maillage mais aussi au pas de temps; cette seconde influence étant liée à la résolution du système linéaire par un solveur itératif. Bien évidemment, une augmentation du coût de calculs est incontournable si le maillage choisi est trop fin ou si le pas de temps est très petit.

b) Flux imposé sur l'extrémité d'une barre d'acier semi-infinie

Rappelons brièvement les conditions de ce deuxième test (cf figure 2.22) :

- Température initiale de la barre : $T_0 = 25^\circ C$
- Température imposée sur le plan $z = 0$: $\Phi_{imp} = 1 MW.m^{-2}$
- Maillage : $h = 2,3 mm$
- Temps de la simulation : $30s$ avec un pas de temps mécanique dt fixé à $1s$
- Données du matériau : $k = 15 W.m^{-1}.K^{-1}$, $\rho = 7800 Kg.m^{-3}$, $c = 360 J.Kg^{-1}.K^{-1}$.

- Solution numérique 3D : visualisation des résultats Gdimp

Maintenir un flux de chaleur constant positif de $1 MW.m^{-2}$ sur l'extrémité d'une pièce à $25^\circ C$ va brutalement réchauffer cette dernière (figure 2.51). Les conditions de ce cas test entraînent un réchauffement uniaxial, mis en évidence sur la figure 2.50.

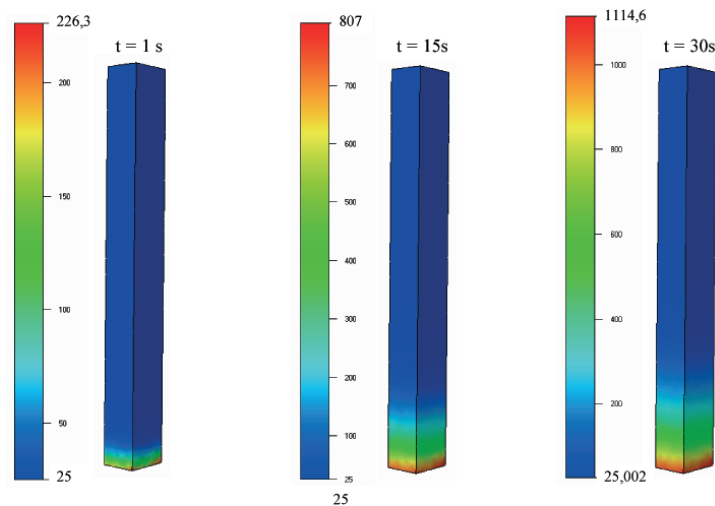


FIG. 2.50 – Isovaleurs de la température au cours de la résolution Gdimp en flux imposé.

En voyant la figure 2.51 qui représente l'évolution thermique Gdimp et analytique (pour quatre noeuds situés à $1mm$, $10mm$, $20mm$ et $50mm$ du bord), le Gdimp se révèle également performant sur le test de flux imposé : avec un maillage moyennement fin de $2,3mm$, des écarts assez faibles sont visibles entre la solution exacte et les courbes Gdimp quelle que soit la position du capteur; et ceci sans la moindre apparition de choc thermique !

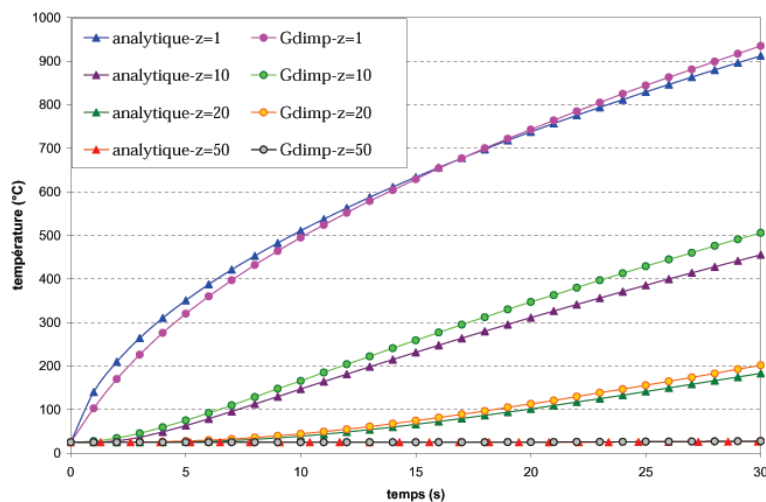


FIG. 2.51 – Evolution de la température des 2 traceurs : comparaison entre la solution analytique et la version Gdimp de Forge3®.

On peut également souligner que ces résultats plus qu'encourageants ont été obtenus après un temps de calcul très acceptable (97s).

- Comparaison du Gdimp avec le TGD et l'approche GS asynchrone

Sur les figures 2.52 et 2.53, ce sont les résolutions GS et Gdimp du code Forge3® qui donnent les meilleurs résultats. Le Gdimp est déjà performant pour estimer la température près du choc thermique (capteur en peau à $z = 1\text{mm}$) avec seulement 4,4% d'erreur mais se révèle moins précis lorsqu'on s'éloigne du bord régulé thermiquement avec respectivement 13% et 10% d'erreur. Le TGD, quant à lui, reste le plus éloigné de la solution analytique avec de très mauvaises précisions : 40%, 60% et 53% d'erreurs (tableau 2.19).

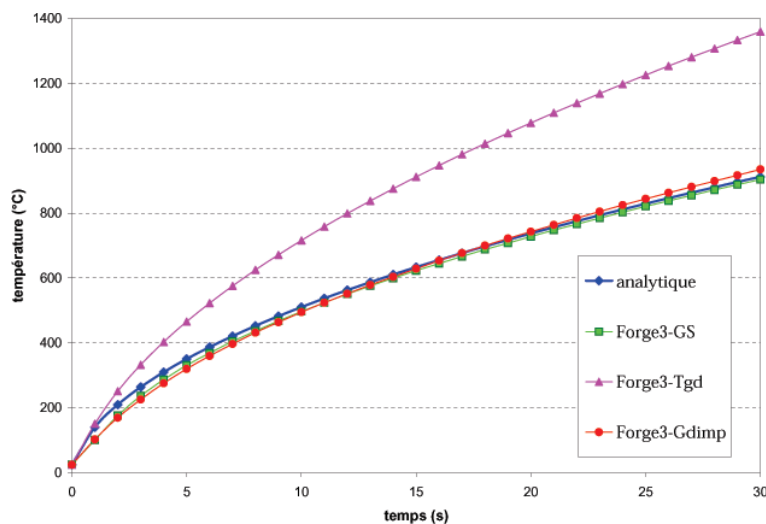


FIG. 2.52 – Evolution de la température du capteur positionné à $z = 1\text{mm}$: comparaison entre la solution analytique, la version GS, la version TGD et Gdimp de Forge3®, avec $h=2,3\text{mm}$.

Pour ce qui est des temps de calcul, l'approche GS est plus rapide (80s) que la résolution Gdimp 97s) qui elle-même est plus rapide que le TGD (8min).

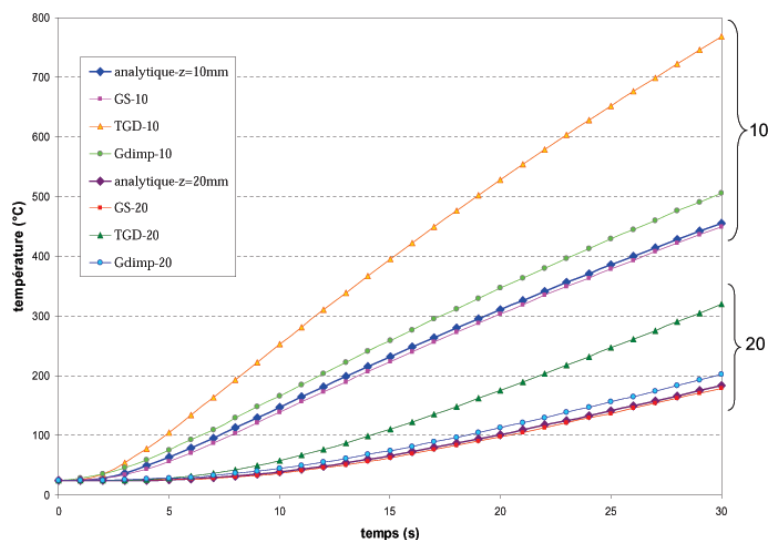


FIG. 2.53 – Comparaison entre la solution analytique, la version GS asynchrone, la version TGD et la version Gdimp de Forge3[®] pour les noeuds positionnés à $z = 10\text{mm}$ et $z = 20\text{mm}$.

$[0, 30\text{s}]$	G S asynchrone	T G D	Gdimp
CPU	80 s	8 min	97 s
Erreur $z=1\text{mm}$	3,77%	40%	4,4%
Erreur $z=10\text{mm}$	4,12%	60%	13,4%
Erreur $z=20\text{mm}$	3,17%	53%	10,3%

TAB. 2.19 – Comparaison des temps de calculs et des pourcentages d'erreur pour $h = 2,3\text{mm}$.

Remarque 2.13 Concernant l'influence de la valeur du flux imposé Φ_{imp} sur la solution numérique Gdimp, les mêmes phénomènes que pour le schéma TGD sont observés (cf p 82) :

"L'erreur Gdimp et le temps de calcul augmentent avec les valeurs croissantes du flux Φ_{imp} ". Ces estimations sont toutefois plus raisonnables que celles obtenues avec la résolution thermique TGD "forgeage" (sauf pour les deux plus petites valeurs du flux imposé).

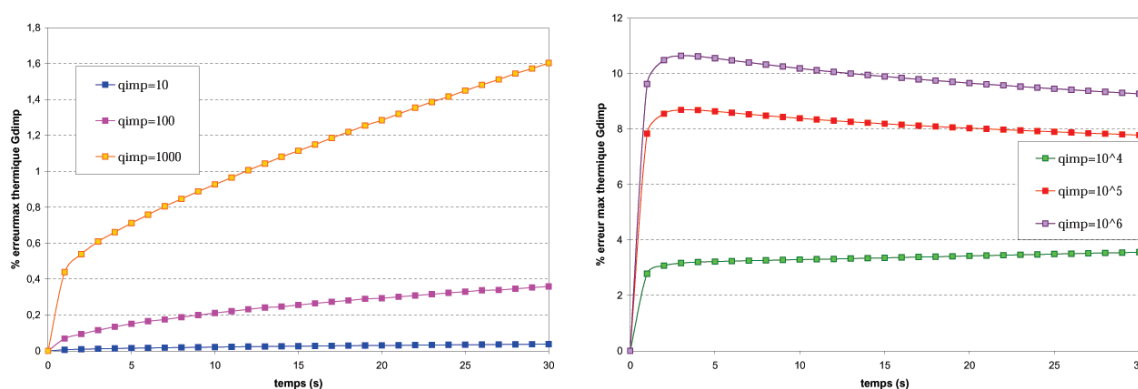


FIG. 2.54 – Influence de la valeur de Φ_{imp} sur la solution numérique Gdimp : évolution de la température pour un noeud placé directement sur la face imposée ($z = 0\text{mm}$) avec $h = 2\text{mm}$.

- Conclusions

Le modèle Gdimp, muni d'une formulation plus locale P_0/P_0^+ , est plutôt bien adapté pour résoudre un cas test de flux imposé; ce qui ne semble guère difficile vu les résultats si catastrophiques de la version TGD "forgeage" lorsque le flux de chaleur est très élevé [Pelissou 2003]. On peut également préciser qu'avec une valeur de flux imposé plus faible (jusqu'à $10^3 W.m^{-2}$), le TGD donne de meilleurs résultats, comparables au Gdimp, avec malgré tout un temps de résolution plus long.

Cependant, le Gdimp se révèle moins performant, aussi bien en précision qu'en temps de calcul, que l'approche GS associée à la thermique asynchrone.

A ce stade des validations des modèles discontinus, on se demande s'il ne faudrait pas introduire une véritable formulation mixte qui aurait la possibilité de calculer et de visualiser, indépendamment, la température et le flux de chaleur, à tout instant de la simulation.

Avant de débattre de ce sujet, comparons notre modèle Gdimp à l'une des seules applications du modèle P_0/P_0^+ .

2.2.2.5 Comparaison du Gdimp au modèle spatio-temporel combiné à l'élément P_0/P_0^+

Ce sont [Batkam-Coupez 2001] qui ont créé l'élément P_0/P_0^+ en vue d'obtenir une discrétisation spatiale plus locale du problème stationnaire de diffusion pure. Cette formulation leur donnant grande satisfaction, ils l'étendirent au problème général de convection/diffusion.

Pour mieux rendre compte des situations complexes rencontrées en injection des polymères, aussi bien d'un point de vue mécanique (transport du front de matière) que thermique, ils développèrent un schéma numérique temporel, en se penchant sur la méthode des éléments finis temporels, leur permettant d'en déduire un modèle spatio-temporel discontinu, déjà introduit au cours du § 1.3.5.2 et plus longuement en Annexe D.

La discrétisation spatio-temporelle de l'équation de la chaleur (D.1) avec une interpolation P_0/P_0^+ en espace et P_0 en temps s'écrit alors :

Etant donné $T_K^{t-\Delta t}$, trouver T_K^t qui vérifie pour tout $K \times]t, t + \Delta t[\in \Omega_h^{st}$:

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (T_K^t - T_K^{t-\Delta t}) - \frac{1}{|K|} \sum_{F \in \partial K} (T_K^t - T_{K(F)}^t) \int_F (\vec{v} \cdot \vec{n})^- ds \\ & + \frac{k}{|K|} \sum_{F \in \partial K} (T_K^t - T_{K(F)}^t) \frac{D |F|^2}{d |K| + |K(F)|} = \frac{\dot{w}_K^t}{\rho c} \end{aligned}} \quad (2.64)$$

La résolution du problème thermique sera alors résolu à partir de cette formulation. Les méthodes de résolution sont donc les mêmes que celles utilisées pour résoudre le modèle Gdimp. Dans le cas présent, les auteurs optent pour la méthode de type Gradient conjugué.

c) Quelques remarques

A la vue de ce système, quelques remarques peuvent être faites :

- En choisissant d'appliquer une interpolation P_0 en temps, le schéma temporel résultant est équivalent à un schéma différences finies de type *Euler implicite amont*, type du modèle Gdimp (2.60). Néanmoins la démarche retenue par [Batkam 2002] pour construire son schéma (2.64) est très différente de celle des méthodes d'Euler, et donc de notre modèle. En effet, cette équivalence est uniquement obtenue dans le cas où l'on considère une interpolation constante P_0 en temps (avec le champ de température interpolé par une valeur constante sur l'intervalle $]t, t + \Delta t[$).

Si l'on enrichit cette interpolation temporelle P_0 avec un ordre plus élevé (P_n , $n \geq 1$), les méthodes deviennent différentes puisqu'une seule inconnue sera à déterminer (sur le pas de temps) avec les schémas d'Euler tandis que le modèle spatio-temporel devra estimer $(n + 1)$ inconnues sur l'intervalle $]t, t + \Delta t[$ [Batkam 2002].

- Ce schéma spatio-temporel (2.64) conduit à la résolution d'un système très local, à l'instar du schéma spatial P_0/P_0^+ : pour estimer l'inconnue T_K^t sur l'élément spatio-temporel $K \times]t, t + \Delta t[$, on a seulement besoin de faire intervenir la température $T_K^{t-\Delta t}$ connue et celle des voisins de cet élément (c'est à dire les termes $T_{K(F)}^t$ pour $F \in \partial K$).

En terme de résolution globale, il y aura une contribution de $(1 + D)$ termes dans la matrice de masse pour chaque élément K .

- On peut également souligner que ce schéma ne requiert aucune condition de stabilité contrairement au schéma TGD ou aux méthodes de Galerkin classiques associées à une intégration temporelle de type différences finies.

- Finalement, la méthode spatio-temporelle de [Batkam 2002] semble avantageuse pour deux raisons :

- Grâce à son élément P_0/P_0^+ , elle est stable et robuste puisqu'elle traite aussi bien les termes de convection que de diffusion.
- Grâce à son schéma espace/temps, elle est rapide.

Cependant, elle reste sensible au maillage avec une erreur importante constatée sur des maillages grossiers. En diffusion pure, la méthode engendre une grande souplesse sur les pas de temps. Par contre, pour les problèmes à convection dominante, les contraintes sur les pas de temps sont davantage marquées, du fait de la nécessaire réactualisation du champ de vitesse \vec{v} .

2.2.2.6 Bilan général

Sur des cas tests où la solution analytique est bien connue (température et flux imposés), la validation du modèle Gdimp ne fait aucun doute, avec une implémentation correcte dans le code EF Forge3[®] et une prise en compte cohérente des diverses conditions aux limites thermiques.

a) Avantages du Gdimp

↪ Par sa construction, le schéma Gdimp muni de l'élément P_0/P_0^+ conduit à un système très local, robuste, précis et facile à implémenter.

↪ Combiner un schéma d'Euler implicite à la formulation locale P_0/P_0^+ a permis d'obtenir une plus grande souplesse dans le choix du pas de temps mécanique et une réduction non négligeable des temps de calculs.

↪ Il est très efficace pour résoudre les problèmes de diffusion pure (dans notre cas, température ou flux imposé(e) sur une extrémité d'une pièce et le reste adiabatique), avec une bonne précision (en comparaison avec la formulation analytique) et avec l'absorption normale et complète du choc thermique.

↪ Le Gdimp se révèle peu sensible au mode de triangulation du maillage, avec des résultats très similaires en considérant un maillage structuré ou non structuré (à taille de maille identique).

↪ Avec ce modèle, nous avons pu conserver tous les avantages d'une formulation mixte et d'une interpolation de bas degré, tout en s'affranchissant des principales limitations du TGD "forgeage".

b) Inconvénients du Gdimp

↪ Toutefois, ce modèle semble sensible au pas de temps (une meilleure précision est obtenue avec un pas de temps très petit au détriment d'une augmentation dans le temps de résolution); ceci étant dû à l'utilisation du solveur itératif de Jacobi. On pourrait donc essayer de changer le solveur pour résoudre le système linéaire symétrique, en envisageant une résolution Gauss-Seidel ou Gradient conjugué, qui occasionnerait les mêmes conséquences par définition même d'une méthode itérative.

↪ De plus, il semble encore sensible à la taille de maille. Bien évidemment sa sensibilité au maillage est moins prononcée que celle du TGD.

↪ Sa formulation plus locale P_0^+ pour l'estimation du flux a permis d'obtenir des résultats encourageants sur le test de flux imposé. Cependant la pertinence du modèle doit être encore améliorée avec une erreur qui reste encore importante suivant la valeur du flux et avec l'approche Galerkin Standard asynchrone plus performante (aussi bien en précision qu'en temps).

Pourquoi alors ne pas introduire une véritable formulation mixte qui aurait la possibilité de calculer et de visualiser, indépendamment, la température et le flux de chaleur, à tout instant de la simulation et qui serait plus proche de la technique de Galerkin standard?

2.2.3 Récapitulatif des modèles TGD et Gdimp

Le schéma Taylor Galerkin Discontinu explicite (TGD) est mieux adapté aux problèmes diffusifs purs que la méthode GS. Néanmoins, cette technique de résolution est trop sensible aux maillages et son caractère explicite impose d'avoir recours à de petits pas de temps, entraînant ainsi des temps de calculs particulièrement élevés. Des problèmes de précision sur l'estimation de la température ont également été remarqués lors du test en flux imposé [Pelissou 2003].

Le modèle Galerkin Discontinu implicite (Gdimp) est une amélioration du TGD qui a la particularité d'estimer plus précisément le vecteur inconnu flux grâce à son interpolation plus locale P_0^+ . Ce schéma stable permet de prendre en compte de plus grands pas de temps, sans perdre en précision. De ce fait, il permet d'obtenir des résultats très encourageants (notamment sur les tests de température imposée mais aussi de flux imposé) avec des temps de calculs

acceptables.

Ces deux schémas sont facilement programmables dans n'importe quel code de calcul éléments finis. Les seules difficultés résident dans l'écriture et dans la gestion des diverses conditions aux limites thermiques, avec un champ de température (et aussi le flux de chaleur) estimé sur chacun des éléments (valeur constante) de la triangulation et non plus aux valeurs nodales. Autrement dit, il faut introduire un lissage au noeud (technique d'Ortiz) pour passer d'une valeur sur l'élément à une valeur nodale de la température à la fin des calculs thermiques de chaque incrément.

T G D	Gdimp
<ul style="list-style-type: none"> • Interpolation P_0/P_0: T et \vec{q} constant par élément. \leadsto Schéma local, stable. • Schéma Taylor explicite \leadsto restriction sur les valeurs dt, explosion des temps CPU. • Schéma bien adapté aux problèmes de convection/diffusion. • Mais très sensible au maillage avec un taux de convergence en $\mathcal{O}(h)$. • Validation sur le test de température imposée: absorption du choc thermique. Plus de réchauffement anormal en début de simulation, avec un refroidissement imposé. • Validation sur le test de flux imposé: pour des valeurs faibles du flux sinon mauvaise estimation de la température. <p>\Rightarrow Amélioration de la précision du calcul du flux et du temps de résolution</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Interpolation P_0/P_0^+: T constante par élément et \vec{q} constant par sous-élément. \leadsto Formulation plus locale. • Schéma d'Euler implicite \leadsto plus grande souplesse dans les dt qui offre un gain de temps non négligeable. • schéma stable avec une convergence plus rapide. • Schéma mieux adapté aux problèmes purement diffusifs. • Moins sensible au maillage mais sensible au dt (solveur itératif), avec des taux de convergence en $\mathcal{O}(h)$ et $\mathcal{O}(\Delta t)$. • Validation sur le test de température imposée: absorption du choc thermique. Plus d'oscillation spatio-temporelle. • Validation sur le test de flux imposé. Mais le Gdimp se révèle moins performant que l'approche GS asynchrone. <p>\Rightarrow Meilleur compromis entre la précision et le temps de calculs.</p>

TAB. 2.20 – *Bilan des modèles TGD et Gdimp.*

Après avoir introduit deux modèles numériques discontinus explicite (TGD) et implicite (Gdimp), tous deux basés sur l'interpolation de plus faible degré P_0 , puis établi des comparaisons entre ces deux méthodes [Pelissou-Massoni 2003], [Pelissou 2003] grâce à des cas tests analytiques, nous souhaitons à présent augmenter le degré d'interpolation du schéma numérique. Pour ce faire, nous envisageons de passer à des polynômes de degré 1 (autrement dit à une interpolation continue P_1) tout en préservant la formulation mixte de notre problème thermique. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Résolution numérique par la nouvelle formulation Mixte continue P_1/P_1

L'objectif de ce chapitre est de développer une méthode éléments finis mixtes qui soit capable, à tout instant du processus thermique, de déterminer indépendamment aussi bien le champ de température que le flux de chaleur. Ainsi, nous introduisons un deuxième modèle numérique, qui a la particularité d'utiliser des éléments finis mixtes linéaires tétraédraux P_1 . Nous nommerons cette nouvelle formulation, *la formulation Mixte continue P_1/P_1* .

Considérer le flux de chaleur comme inconnue indépendante va donc rajouter un certain nombre de données et de paramètres dans le système d'équations matricielles final et accroître sensiblement la flexibilité du modèle lors de l'imposition des diverses conditions aux limites. De plus, la température et le flux de chaleur n'auront pas le même degré de précision avec cette interpolation P_1/P_1 puisque :

$$T \in P_1 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla T} \in P_0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{q} \in P_1$$

Nous espérons qu'en conservant la formulation mixte du problème thermique instationnaire, l'utilisation des éléments finis mixtes linéaires n'entraîneront pas les mêmes problèmes d'instabilités que ceux occasionnés par l'approche Galerkin Standard.

Puisque la résolution de problème thermique est axée sur le régime instationnaire, les inconnues du problème dépendent à la fois des variables spatiales et temporelles. Il faudra donc compléter la formulation Mixte continue par une approximation temporelle. La formulation sera combinée à plusieurs schémas d'intégration temporelle afin de trouver le plus performant, en terme de précision et de coût de calculs, pour la simulation de problèmes thermomécaniques fortement couplés. On verra que le schéma Dupont implicite à trois pas de temps répondra à tous nos critères.

Sachant que peu de travaux existent dans ce domaine, on se propose d'en faire un bref survol avant de décrire la formulation Mixte P_1 (basée sur l'élément fini mixte continu P_1/P_1 et sur une intégration temporelle globale à trois pas de temps); ce qui permettra de mieux positionner notre démarche par la suite. Enfin, une dernière partie sera consacrée aux applications numériques afin d'évaluer la robustesse de cette formulation par comparaison aux schémas discontinus TGD et Gdimp. La validation de la méthode proposée sera effectuée, comme précédemment, sur des tests purement thermiques où la solution analytique est bien connue.

3.1 Bibliographie sur les méthodes mixtes

Peu de travaux existent dans ce domaine.

On peut cependant citer ceux de [Zienkiewicz-Taylor 1989] ainsi que ceux de [Manzari 1998, Manzari 1999]. Ce dernier considère des problèmes de conduction thermique dans des milieux non régis par la loi de Fourier, mais subissant un effet dit "Non Fourier" décrit par la loi "Non Fourier Heat Conduction" (loi NFHC) où le flux et la dérivée temporelle du flux (via un paramètre de relaxation τ) dépendent linéairement du gradient de température (3.2).

3.1.1 Equations régissant les problèmes hyperboliques de conduction

- La conservation de l'énergie pour un élément infinitésimal d'un corps solide requiert :

$$\operatorname{div} \vec{q} + \rho C_v \dot{T} = g \quad (3.1)$$

où g est la fonction de création de chaleur, ρ la densité, C_v la chaleur spécifique à volume constant et \dot{T} représente la dérivée partielle temporelle de la température.

- La loi de Non Fourier Heat Conduction s'écrit communément :

$$\vec{q} + \tau \cdot \dot{\vec{q}} = -\mathbf{K} \cdot \nabla T \quad (3.2)$$

\mathbf{K} et τ sont respectivement le tenseur de conductivité thermique et le tenseur temps de relaxation dépendant du milieu. Pour un matériau anisotrope dont les principaux axes de direction sont x , y et z , ces tenseurs se définissent comme suit :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_x & 0 & 0 \\ 0 & \tau_y & 0 \\ 0 & 0 & \tau_z \end{bmatrix}$$

Le paramètre temps de relaxation τ_i est défini par $\frac{\alpha_i}{c_i^2} \quad \forall i \in \{x, y, z\}$ avec :

$$\begin{cases} c & \text{la vitesse de propagation de l'onde thermique dans le milieu} \\ \alpha & \text{la diffusivité thermique avec } \alpha = \frac{k}{\rho C_v} \\ k & \text{la conductivité thermique} \end{cases}$$

Remarque 3.1 En posant $\tau = 0$ dans l'expression (3.2), on se ramène à la loi de Fourier classique (qui nous intéresse).

Remarque 3.2 Le temps de relaxation τ représente le retard de phase, c'est à dire qu'il faut un temps τ pour que le gradient de température produise un flux de chaleur. Ce paramètre de relaxation est de $10^{-4}s$ pour les métaux.

- Les conditions initiales requises pour le problème hyperbolique de conduction thermique doivent s'exprimer en fonction de la température et du flux de chaleur initiaux ainsi que de leurs dérivées temporelles. C'est à dire, avec des fonctions f_i connues :

$$\begin{cases} T = f_1(x, y, z) & \text{et} & \dot{T} = f_2(x, y, z) \\ \vec{q} = f_3(x, y, z) & \text{et} & \dot{\vec{q}} = f_4(x, y, z) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\text{ou plus simplement : } T = 0, \quad \dot{T} = 0, \quad \vec{q} = \vec{0}, \quad \vec{\dot{q}} = \vec{0} \quad (3.4)$$

• Avec cette loi de conduction de non Fourier (3.2), tous les types de conditions aux limites peuvent être considérés. La plupart du temps, ce sont des conditions de Dirichlet, avec une température ou un flux de chaleur imposé(e). [Manzari 1998] précise que l'on peut également rajouter d'autres types de transferts thermiques, comme la conduction ou la convection/rayonnement.

3.1.2 Approche Galerkin Standard combinée à un θ -schéma

[Manzari 1998] utilise d'abord l'approche Galerkin avec des éléments finis P_2/P_1 combinée à un θ -schéma (méthode s'avérant très coûteuse et donc, très limitée), puis opte pour les éléments P_1/P_1 associés au schéma de Crank-Nicholson (méthode plus performante mais validée uniquement sur des tests uni et bidimensionnels) [Manzari 1999].

Avant d'introduire ces deux approches, nous avons besoin d'explicitier la formulation faible associée.

3.1.2.1 Formulation variationnelle

De manière standard, la formulation variationnelle de ce type de problème hyperbolique de conduction s'écrit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(\rho C_v \dot{T} + \operatorname{div} \vec{q} - g \right) w_T \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \left(\vec{q} + \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{\dot{q}} + \mathbf{K} \cdot \nabla \vec{T} \right) w_q \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

où w_T est la fonction test pour la température et w_q est la fonction test pour le flux. En fait, w_q est une matrice diagonale dont les termes diagonaux correspondent aux poids des composantes du flux. En appliquant le théorème de Green sur la première équation de (3.5), on en déduit :

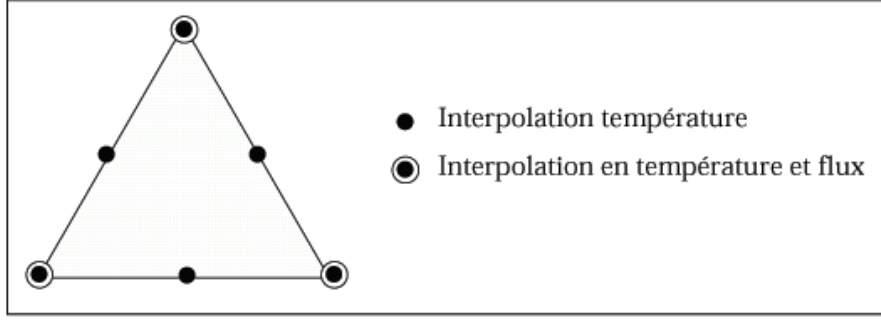
$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(\rho C_v \dot{T} w_T - \vec{q} \cdot \nabla w_T - g w_T \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} w_T \, dS = 0 \\ \int_{\Omega} \left(\vec{q} + \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{\dot{q}} + \mathbf{K} \cdot \nabla \vec{T} \right) w_q \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

3.1.2.2 Discrétisation spatiale : éléments finis P_2/P_1 [Manzari 1998]

En considérant cette formulation variationnelle, on doit être capable de choisir des éléments finis mixtes compatibles [Brezzi-Fortin 1991] en T et \vec{q} . Ainsi l'auteur opte pour l'élément P_2/P_1 (figure 3.1), dans le cadre d'une modélisation 2D : le champ de température T est interpolé par des polynômes (quadratiques) de degré 2 par élément tandis que chacune des composantes du flux (q_x et q_y) est approchée par des polynômes (linéaires) de degré 1 par élément; les champs interpolés sont continus au passage entre les éléments.

Finalement, en notant $[\Delta_i] = [T_i, q_{x_i}, q_{y_i}]^T$ le vecteur inconnu au noeud i du maillage, \mathbf{M} la matrice de capacité, \mathbf{K} et \mathbf{K}_S les matrices de conductivité volumique et surfacique et \mathbf{F} et \mathbf{F}_S les vecteurs volumique et surfacique du second membre, cette discrétisation spatiale conduit au système suivant :

$$\boxed{\mathbf{M} \dot{\Delta} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_S) \Delta = \mathbf{F} + \mathbf{F}_S} \quad (3.7)$$

FIG. 3.1 – Élément P_2/P_1 en température/flux [Manzari 1998].

En fixant deux noeuds i et j d'un élément de la triangulation, les composantes des matrices et vecteurs respectifs se mettent sous la forme :

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \rho c N_i^T N_j^T dx dy & 0 & 0 \\ 0 & \int_{\Omega} \frac{\tau_x}{K_x} N_i^q N_j^q dx dy & 0 \\ 0 & 0 & \int_{\Omega} \frac{\tau_y}{K_y} N_i^q N_j^q dx dy \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i^T}{\partial x} N_j^q dx dy & - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i^T}{\partial y} N_j^q dx dy \\ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i^T}{\partial x} N_j^q dx dy & \int_{\Omega} \frac{1}{K_x} N_i^q N_j^q dx dy & 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i^T}{\partial y} N_j^q dx dy & 0 & \int_{\Omega} \frac{1}{K_y} N_i^q N_j^q dx dy \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$K_{Sij} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} h N_i^T N_j^T dS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$F_i = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} N_i^T g dx dy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{Si} = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma} (h T_e + q_s) N_i^T dS \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

3.1.2.3 Schéma d'intégration temporelle : θ -schéma

Une θ -méthode différence finie est considérée :

$$\theta [\dot{X}]_{t+\Delta t} + (1-\theta) [\dot{X}]_t = \frac{[X]_{t+\Delta t} - [X]_t}{\Delta t} \quad (3.12)$$

Cette intégration temporelle, associée à la discrétisation spatiale (3.7) permet d'obtenir le système matriciel suivant qui détermine les inconnues $[\Delta_i]$ à l'instant $t + \Delta t$:

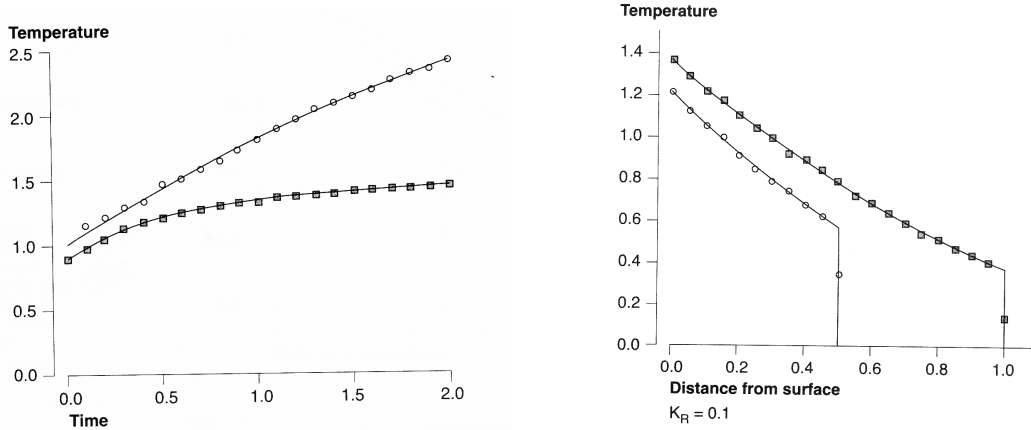
$$\left[\frac{M}{\Delta t} + \theta \tilde{K} \right] [\Delta]_{t+\Delta t} + \left[-\frac{M}{\Delta t} + (1-\theta) \tilde{K} \right] [\Delta]_t = (1-\theta) [\tilde{F}]_t + \theta [\tilde{F}]_{t+\Delta t} \quad (3.13)$$

où $\tilde{K} = K + K_S$ et $\tilde{F} = F + F_S$.

Le schéma (3.13) est donc inconditionnellement stable pour $\theta \geq \frac{1}{2}$, en particulier pour $\theta = \frac{1}{2}$ avec le schéma de Crank-Nicholson et pour $\theta = \frac{2}{3}$ (c'est la méthode de Galerkin).

3.1.2.4 Applications

Pour vérifier la validité et l'efficacité de cette méthode, [Manzari 1998] la teste notamment sur des problèmes monodimensionnels, munis d'une solution exacte, comme le cas d'un milieu semi-infini soumis à un flux de chaleur suivant un pas variable (figure 3.2).



(a) au cours du temps d'un capteur frontalier : en haut $K_r = 0$, en bas $K_r = 0,1$.

(b) en s'éloignant de la surface imposée avec $K_r = 0,1$ et suivant deux coupes.

FIG. 3.2 – Evolution de la température [Manzari 1998].

Sur la figure 3.2, on observe une bonne concordance entre les solutions exactes (traits pleins) et les solutions numériques FEM (carré et rond); K_r représentant le paramètre de radiation.

3.1.2.5 Quelques remarques

Grâce à la solution simultanée de la température et du flux de chaleur, cette méthode mixte apparaît efficace pour traiter les problèmes de propagation d'ondes thermiques. De plus, le fait que la température et le flux soient deux variables indépendantes permet d'imposer plus facilement et plus précisément les conditions aux limites.

[Manzari 1998] constate que la solution obtenue est stable et précise pour des problèmes de chocs thermiques violents. En effet, les solutions numériques (1D et 2D) sur des cas tests confirment que la méthode peut capturer correctement la physique du mouvement de l'onde thermique.

Mais elle s'avère très coûteuse du fait de l'interpolation élevée des inconnues et nécessite de résoudre des systèmes linéaires suivant des techniques spécifiques. C'est pourquoi [Manzari 1999] améliore son modèle en utilisant l'approche Galerkin avec cette fois-ci des éléments P_1/P_1 et un schéma d'intégration temporelle de Crank-Nicholson. Ce schéma se révèle plus performant mais l'auteur se contente de l'appliquer à des problèmes uni et bidimensionnels, et avec des conditions de flux imposé.

On est donc en droit de s'interroger sur la fiabilité de ce nouveau modèle sur des cas d'une part tridimensionnels et d'autre part plus sévères, par exemple dans des conditions thermiques des procédés de forgeage à chaud.

3.2 Formulation proposée du problème thermique mixte

Deux approches d'éléments finis mixtes assez similaires ont été proposées par Manzari [Manzari 1998, Manzari 1999] pour résoudre les problèmes de conduction NFHC en 1D et 2D. On va donc adapter cette technique au problème thermomécanique 3D (avec la prise en compte de la déformation) où la loi de conduction est plus simple (le temps de relaxation τ est nul) mais où les transferts thermiques sont plus importants et diversifiés.

Pour pouvoir appliquer cette nouvelle formulation Mixte inspirée des travaux de [Manzari 1999], nous avons besoin au préalable de réécrire les équations régissant le problème thermique instationnaire.

3.2.1 Réécriture de la formulation forte

Rappelons que le problème mixte (2.3) se compose distinctement de la loi de Fourier et de l'équation de la chaleur (2.1), avec un certain nombre de conditions initiales et aux limites.

Pour la suite, nous choisirons d'écrire la loi de Fourier comme suit :

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T \Leftrightarrow k^{-1} \vec{q} + \vec{\nabla} T = 0 \quad (3.14)$$

Plus précisément, pour chaque composante spatiale q_l du flux, la loi de Fourier s'écrit :

$$\forall l \in [1,3], \quad k^{-1} q_l + \frac{\partial T}{\partial x_l} = 0 \quad (3.15)$$

De même, l'équation de la chaleur va être quelque peu modifiée en changeant le signe; ce changement nécessaire pour conserver la symétrie de la matrice de raideur :

$$-\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div} \vec{q} = -\dot{w} \quad (3.16)$$

Finalement, après réécriture, le problème thermique mixte qui nous intéresse s'exprime de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} k^{-1} q_l + \frac{\partial T}{\partial x_l} = 0 \quad \forall l \in [1,3] & \text{dans } \Omega \\ -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{q} = -\dot{w} & \text{dans } \Omega \times]0, t[\\ T(x, 0) = T_0, \quad \vec{q} = \vec{0} & \forall x \in \Omega \\ T = T_{imp} & \text{sur } \Gamma_1 \times]0, t[\\ \vec{q} \cdot \vec{n} = -\phi_{imp} & \text{sur } \Gamma_2 \times]0, t[\\ \vec{q} \cdot \vec{n} = h_{cd}(T - T_{out}) & \text{sur } \Gamma_3 \times]0, t[\\ \vec{q} \cdot \vec{n} = h(T - T_{ext}) & \text{sur } \Gamma_4 \times]0, t[\end{array} \right. \quad (3.17)$$

3.2.2 Formulation variationnelle

Pour résoudre ce problème thermique (3.17), nous introduisons sa formulation variationnelle en considérant l'espace \mathcal{W}_q des fonctions tests φ_q associé au flux et l'espace \mathcal{V}_T des fonctions tests température φ_T s'annulant sur la frontière Γ_1 .

- La formulation faible de la loi de Fourier s'exprime alors pour $\forall l \in [1,3]$:

$$\boxed{\int_{\Omega} k^{-1} q_l \varphi_q d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial x_l} \varphi_q d\Omega = 0 \quad \forall \varphi_q \in \mathcal{W}_q} \quad (3.18)$$

- La formulation faible de l'équation de la chaleur s'écrit quant à elle :

$$-\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \varphi_T d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{q} \varphi_T d\Omega = -\int_{\Omega} \dot{w} \varphi_T d\Omega \quad \forall \varphi_T \in \mathcal{V}_T \quad (3.19)$$

En utilisant la formule de Green sur le terme de divergence, on en déduit pour $\forall \varphi_T \in \mathcal{V}_T$:

$$-\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \varphi_T d\Omega + \int_{\Omega} \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \varphi_T d\Omega - \int_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} \varphi_T d\Gamma = -\int_{\Omega} \dot{w} \varphi_T d\Omega \quad (3.20)$$

La décomposition de Γ en quatre sous-parties ($\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$) nous permet de déterminer la quantité $\int_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} \varphi_T d\Gamma$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} \varphi_T d\Gamma &= -\int_{\Gamma_2} \Phi_{imp} \varphi_T d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} h_{cd}(T - T_{out}) \varphi_T d\Gamma_3 \\ &+ \int_{\Gamma_4} h(T - T_{ext}) \varphi_T d\Gamma_4 \quad \forall \varphi_T \in \mathcal{V}_T \end{aligned} \quad (3.21)$$

Autrement dit, la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur se met sous la forme suivante pour $\forall \varphi_T \in \mathcal{V}_T$:

$$\boxed{\begin{aligned} &-\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \varphi_T d\Omega + \int_{\Omega} \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \varphi_T d\Omega - \int_{\Gamma_3} h_{cd} T \varphi_T d\Gamma_3 - \int_{\Gamma_4} h T \varphi_T d\Gamma_4 \\ &= -\int_{\Omega} \dot{w} \varphi_T d\Omega - \int_{\Gamma_2} \phi_{imp} \varphi_T d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_3} h_{cd} T_{out} \varphi_T d\Gamma_3 - \int_{\Gamma_4} h T_{ext} \varphi_T d\Gamma_4 \end{aligned}} \quad (3.22)$$

En introduisant des espaces fonctionnels adéquats tels que $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ et en rappelant que l'espace $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_0)$ est muni de son produit scalaire $(u, w)_\Omega = \int_\Omega u w \, d\Omega$ et que $L^2(0, t; V)$ est l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $]0, t[$ à valeurs dans V , nous pouvons considérer les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u, v) = \int_\Omega k^{-1} u v \, d\Omega \\ b(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot v \, d\Omega \quad \text{et} \quad B(u, v) = \int_\Omega u \cdot \nabla v \, d\Omega \\ c(u, v) = - \int_\Omega \rho c u v \, d\Omega \\ d(u, v) = - \int_{\Gamma_3} h u v \, d\Gamma_3 - \int_{\Gamma_4} h_{cd} u v \, d\Gamma_4 \\ l(v) = - \int_\Omega \dot{w} v \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \phi_{imp} v \, d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_3} h u_{ext} v \, d\Gamma_3 - \int_{\Gamma_4} h_{cd} u_{out} v \, d\Gamma_4 \end{array} \right.$$

Ce qui nous conduit à l'écriture de la formulation faible associée au problème thermique (3.17) :

Trouver $\vec{q} \in [L^2(\Omega)]^3$ et $T \in L^2(0, t; H^1(\Omega))$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\vec{q}, \varphi_q) + b(T, \varphi_q) = 0 \quad \forall \varphi_q \in [L^2(\Omega)]^3 \\ \frac{\partial}{\partial t} c(T, \varphi_T) + B(\vec{q}, \varphi_T) + d(T, \varphi_T) = l(\varphi_T) \quad \forall \varphi_T \in H^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.23)$$

3.2.3 Formulation variationnelle discrète

La méthode de Galerkin standard, introduite par [Zienkiewicz-Taylor 1989], consiste à approcher \mathcal{V}_T et \mathcal{W}_q par V_h et W_h où V_h et W_h sont les espaces des fonctions d'interpolation (pour la température T et le flux \vec{q}) qui sont des polynômes de degré n par élément (n représente le degré d'interpolation choisi). Pour cela, il faut au préalable discrétiser le domaine Ω (noté Ω_h) en un ensemble de $nelt$ éléments Ω_e construits à partir de leurs noeuds.

La formulation variationnelle discrète du problème thermique (3.17) s'écrit alors :

Trouver $\vec{q} \in W_h$ et $T_h \in L^2(0, t; V_h)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\vec{q}_h, \varphi_q) + b(T_h, \varphi_q) = 0 \quad \forall \varphi_q \in W_h \\ \frac{\partial}{\partial t} c(T_h, \varphi_T) + B(\vec{q}_h, \varphi_T) + d(T_h, \varphi_T) = l(\varphi_T) \quad \forall \varphi_T \in V_h \end{array} \right. \quad (3.24)$$

3.3 Discrétisation spatiale par éléments finis

Nous souhaitons conserver le caractère mixte en température/flux du problème thermique pour discrétiser sa formulation variationnelle. Pour cela, sur la base es travaux de [Manzari 1998], nous choisissons d'utiliser des éléments finis mixtes continus.

3.3.1 Méthode des éléments finis mixtes P_1/P_1

La discrétisation spatiale du problème thermique se fait à l'aide des éléments finis mixtes continus P_1/P_1 :

- la température et chaque composante du flux sont interpolées par des polynômes linéaires de degré 1 par élément (figure 3.3), soit 4 inconnues par noeud (en 3D),
- les champs interpolés sont continus au passage entre les éléments.

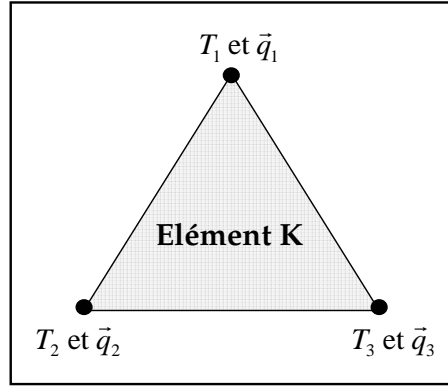


FIG. 3.3 – Configuration 2D de l'élément fini mixte P_1/P_1 en température/flux.

Si l'on considère l'élément Ω_e , on a alors :

$$\begin{cases} T(x,t) = \sum_{k=1}^{nel} T_k(t) N_k^{T_e}(x) \\ q_l(x,t) = \sum_{k=1}^{nel} q_k^l(t) N_k^{q_e}(x) \quad \forall l \in [1,3] \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\text{où } \begin{cases} nel = 4 & : \text{ nombre de noeuds de l'élément } \Omega_e, \\ N_k^{T_e} & : \text{ fonction d'interpolation de la température pour le } k^e \text{ noeud de l'élément } \Omega_e ; \\ & \text{ fonction linéaire valant 1 au noeud } k \text{ et nulle aux autres noeuds,} \\ T_k & : \text{ température au noeud } k \text{ de l'élément } \Omega_e, \\ N_k^{q_e} & : \text{ fonction d'interpolation du flux pour le } k^e \text{ noeud de l'élément } \Omega_e ; \text{ fonction} \\ & \text{ linéaire valant 1 au noeud } k \text{ et nulle aux autres noeuds,} \\ q_k^l & : l^{\text{ème}} \text{ composante du flux au noeud } k \text{ de l'élément } \Omega_e. \end{cases}$$

Le problème étant ainsi posé, il suffit de trouver les trois composantes du flux et le champ de température en chaque noeud du domaine Ω_h discrétisé.

3.3.2 Système d'équations différentielles

La discrétisation spatiale du problème thermique commence par la discrétisation spatiale de la loi de Fourier puis de celle de l'équation de la chaleur. On sera alors amené à résoudre un système d'équations différentielles.

• Discrétisation spatiale de la loi de Fourier

Dans l'équation (3.18), nous choisissons pour φ_q les fonctions de base : $\varphi_q = {}^l N_i^{q_e}$ pour $\forall i \in [1, nel]$ dans Ω_e ; ce qui donne :

$$I_i^l = \int_{\Omega_e} k^{-1} q_l {}^l N_i^{q_e} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \frac{\partial T}{\partial x_l} {}^l N_i^{q_e} d\Omega_e = 0. \quad (3.26)$$

En interpolant la composante q_l sur l'élément Ω_e , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} k^{-1} q_l {}^l N_i^{q_e} d\Omega_e &= \int_{\Omega_e} k^{-1} \left(\sum_{j=1}^{nel} q_j^l {}^l N_j^{q_e} \right) {}^l N_i^{q_e} d\Omega_e \\ &= \sum_{j=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} k^{-1} {}^l N_j^{q_e} {}^l N_i^{q_e} d\Omega_e \right) q_j^l = \sum_{j=1}^{nel} {}^l A_{ij}^e q_j^l \end{aligned}$$

De même, en interpolant la température T au niveau de second terme de (3.26), on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \frac{\partial T}{\partial x_l} {}^l N_i^{q_e} d\Omega_e &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_{j=1}^{nel} T_j {}^l N_j^{T_e} \right) {}^l N_i^{q_e} d\Omega_e \\ &= \sum_{j=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} \frac{\partial {}^l N_j^{T_e}}{\partial x_l} {}^l N_i^{q_e} d\Omega_e \right) T_j = \sum_{j=1}^{nel} {}^l B_{ij}^e T_j \end{aligned}$$

Finalement, la discrétisation de la loi de Fourier se met sous la forme simplifiée :

$$\boxed{I_i^l = \sum_{j=1}^{nel} ({}^l A_{ij}^e q_j^l + {}^l B_{ij}^e T_j) = 0 \quad \forall l \in [1,3]} \quad (3.27)$$

• Discrétisation spatiale de l'équation de la chaleur

Dans l'équation (3.22), nous choisissons pour φ_T les fonctions de base : $\varphi_T = N_i^{T_e} \forall i \in [1, nel]$ dans Ω_e ; ce qui donne :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_e} \rho c \frac{dT}{dt} N_i^{T_e} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \vec{q} \cdot \vec{\nabla} N_i^{T_e} d\Omega_e - \int_{\Gamma_3^e} h T N_i^{T_e} d\Gamma_3^e - \int_{\Gamma_4^e} h_{cd} T N_i^{T_e} d\Gamma_4^e \\ &= - \int_{\Omega_e} \dot{w} N_i^{T_e} d\Omega_e - \int_{\Gamma_2^e} \phi_{imp} N_i^{T_e} d\Gamma_2^e - \int_{\Gamma_3^e} h T_{ext} N_i^{T_e} d\Gamma_3^e - \int_{\Gamma_4^e} h_{cd} T_{out} N_i^{T_e} d\Gamma_4^e \end{aligned} \quad (3.28)$$

En introduisant l'approximation de la température (3.25) dans le premier terme de gauche de (3.28), on a :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_e} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} N_i^{T_e} d\Omega_e &= - \int_{\Omega_e} \rho c \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^{nel} T_j {}^l N_j^{T_e} \right) N_i^{T_e} d\Omega_e \\ &= - \sum_{j=1}^{nel} \left(\int_{\Omega_e} \rho c {}^l N_j^{T_e} N_i^{T_e} d\Omega_e \right) \frac{\partial T_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{nel} C_{ij}^e \frac{\partial T_j}{\partial t} \end{aligned}$$

On s'aperçoit que le deuxième terme de gauche de (3.28) a déjà été calculé lors de la discrétisation de la loi de Fourier. En effet, on retrouve l'expression de B_{ij}^e :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \vec{q} \cdot \vec{\nabla} N_i^{T_e} d\Omega_e &= \sum_{l=1}^3 \left\{ \int_{\Omega_e} \left(\sum_{j=1}^{nel} q_j^l N_j^{q_e} \right) \frac{\partial N_i^{T_e}}{\partial x_l} d\Omega_e \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{nel} \left(\sum_{l=1}^3 \int_{\Omega_e} N_j^{q_e} \frac{\partial N_i^{T_e}}{\partial x_l} d\Omega_e \right) q_j^l = \sum_{j=1}^{nel} B_{ji}^e q_j^l \end{aligned}$$

En ce qui concerne les deux termes surfaciques de la partie gauche de (3.28), on aboutit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_3^e} h T N_i^{T_e} d\Gamma_3^e - \int_{\Gamma_4^e} h_{cond} T N_i^{T_e} d\Gamma_4^e \\ &= - \int_{\Gamma_3^e} h \left(\sum_{j=1}^{nel} T_j N_j^{T_e} \right) N_i^{T_e} d\Gamma_3^e - \int_{\Gamma_4^e} h_{cond} \left(\sum_{j=1}^{nel} T_j N_j^{T_e} \right) N_i^{T_e} d\Gamma_4^e \\ &= - \sum_{j=1}^{nel} \left(\int_{\Gamma_3^e} h N_j^{T_e} N_i^{T_e} d\Gamma_3^e + \int_{\Gamma_4^e} h_{cond} N_j^{T_e} N_i^{T_e} d\Gamma_4^e \right) T_j = \sum_{j=1}^{nel} D_{ij}^e T_j \end{aligned}$$

Pour tout le membre de droite de (3.28), on utilise la notation suivante :

$$Q_i^e = - \int_{\Omega_e} \dot{w} N_i^{T_e} d\Omega_e - \int_{\Gamma_2^e} \phi_{imp} N_i^{T_e} d\Gamma_2^e - \int_{\Gamma_3^e} h T_{ext} N_i^{T_e} d\Gamma_3^e - \int_{\Gamma_4^e} h_{cond} T_{out} N_i^{T_e} d\Gamma_4^e$$

Finalement, la discrétisation de l'équation de la chaleur se met sous la forme simplifiée :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{nel} (C_{ij}^e \frac{\partial T_j}{\partial t} + B_{ji}^e q_j^l + D_{ij}^e T_j) = Q_i^e} \quad (3.29)$$

3.3.3 Bilan local de la discrétisation spatiale du problème thermique

Les deux discrétisations spatiales (3.27) et (3.29) conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{nel} ({}^l A_{ij}^e q_j^l + {}^l B_{ij}^e T_j) = 0 & \forall l \in [1,3] \\ \sum_{j=1}^{nel} (C_{ij}^e \frac{\partial T_j}{\partial t} + B_{ji}^e q_j^l + D_{ij}^e T_j) = Q_i^e \end{cases} \quad (3.30)$$

En combinant les trois composantes du flux, ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} A^e \bar{q} + B^e \bar{T} = 0 \\ C^e \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + {}^\top B^e \bar{q} + D^e \bar{T} = Q^e \end{cases} \quad (3.31)$$

Posons $\{U_j\} = \{q_{x_j}, q_{y_j}, q_{z_j}, T_j\}^\top$ le vecteur inconnu au noeud j du maillage. Au niveau local, c'est à dire pour chaque élément Ω_e du domaine Ω_h , la discrétisation spatiale du problème thermique se ramène à un système de $(4 * 4)$ équations à $(4 * 4)$ inconnues U_j ($j \in \{1, 4\}$), s'écrivant sous forme matricielle :

$$\boxed{\mathbf{M}^e \frac{\partial \mathbf{U}^e}{\partial t} + \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F}^e} \quad (3.32)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mathbf{U}^e = \{\mathbf{U}_1^e, \mathbf{U}_2^e, \mathbf{U}_3^e, \mathbf{U}_4^e\}^\top : \text{ vecteur inconnu sur l'élément } \Omega_e \text{ du maillage} \\ \mathbf{M}^e : \text{ matrice locale de capacité, } M^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^e \end{pmatrix} \\ \mathbf{K}^e : \text{ matrice locale de conductivité, } K^e \simeq \begin{pmatrix} A^e & B^e \\ {}^\top B^e & D^e \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q^e \end{Bmatrix} \text{ vecteur local chargement des conditions aux limites.} \end{cases}$$

Détaillons un peu toutes ces matrices locales et ce vecteur chargement.

- Afin de définir correctement la matrice locale de capacité \mathbf{M}^e , on a besoin d'écrire **la matrice symétrique $(4 * 4)$ locale C^e** , n'intervenant donc que sur les inconnues températures nodales.

On rappelle la notation des composantes $C_{ij}^e = - \int_{\Omega_e} \rho c N_j^{T_e} N_i^{T_e} d\Omega_e$.

$$C^e = \begin{bmatrix} C_{11}^e & C_{12}^e & C_{13}^e & C_{14}^e \\ C_{21}^e & C_{22}^e & C_{23}^e & C_{24}^e \\ C_{31}^e & C_{32}^e & C_{33}^e & C_{34}^e \\ C_{41}^e & C_{42}^e & C_{43}^e & C_{44}^e \end{bmatrix}$$

- Afin d'écrire correctement la matrice locale de conductivité K^e , on a besoin de définir :

- **la matrice symétrique $(12 * 12)$ locale A^e** , n'intervenant donc que sur les inconnues flux nodaux. Avec ${}^l A_{ij}^e = \int_{\Omega_e} k^{-1} N_j^{q_e} {}^l N_i^{q_e} d\Omega_e$ pour chaque composante x, y et z du flux.

$$A^e = \begin{bmatrix} {}^x A_{11}^e & 0 & 0 & {}^x A_{21}^e & 0 & 0 & {}^x A_{31}^e & 0 & 0 & {}^x A_{41}^e & 0 & 0 \\ 0 & {}^y A_{11}^e & 0 & 0 & {}^y A_{21}^e & 0 & 0 & {}^y A_{31}^e & 0 & 0 & {}^y A_{41}^e & 0 \\ 0 & 0 & {}^z A_{11}^e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^z A_{31}^e & 0 & 0 & {}^z A_{41}^e \\ {}^x A_{12}^e & 0 & 0 & {}^x A_{22}^e & 0 & 0 & {}^x A_{32}^e & 0 & 0 & {}^x A_{42}^e & 0 & 0 \\ 0 & {}^y A_{12}^e & 0 & 0 & {}^y A_{22}^e & 0 & 0 & {}^y A_{32}^e & 0 & 0 & {}^y A_{42}^e & 0 \\ 0 & 0 & {}^z A_{12}^e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^z A_{32}^e & 0 & 0 & {}^z A_{42}^e \\ {}^x A_{13}^e & 0 & 0 & {}^x A_{23}^e & 0 & 0 & {}^x A_{33}^e & 0 & 0 & {}^x A_{43}^e & 0 & 0 \\ 0 & {}^y A_{13}^e & 0 & 0 & {}^y A_{23}^e & 0 & 0 & {}^y A_{33}^e & 0 & 0 & {}^y A_{43}^e & 0 \\ 0 & 0 & {}^z A_{13}^e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^z A_{33}^e & 0 & 0 & {}^z A_{43}^e \\ {}^x A_{14}^e & 0 & 0 & {}^x A_{24}^e & 0 & 0 & {}^x A_{34}^e & 0 & 0 & {}^x A_{44}^e & 0 & 0 \\ 0 & {}^y A_{14}^e & 0 & 0 & {}^y A_{24}^e & 0 & 0 & {}^y A_{34}^e & 0 & 0 & {}^y A_{44}^e & 0 \\ 0 & 0 & {}^z A_{14}^e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^z A_{34}^e & 0 & 0 & {}^z A_{44}^e \end{bmatrix}$$

- la **matrice (12 * 4) locale B^e** , avec comme composantes ${}^l B_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_j^{T_e}}{\partial x_l} {}^l N_i^{q_e} d\Omega_e$ pour chaque composante x, y et z du flux.

$$B^e = \begin{bmatrix} x B_{11}^e & x B_{12}^e & x B_{13}^e & x B_{14}^e \\ y B_{11}^e & y B_{12}^e & y B_{13}^e & y B_{14}^e \\ z B_{11}^e & z B_{12}^e & z B_{13}^e & z B_{14}^e \\ x B_{21}^e & x B_{22}^e & x B_{23}^e & x B_{24}^e \\ y B_{21}^e & y B_{22}^e & y B_{23}^e & y B_{24}^e \\ z B_{21}^e & z B_{22}^e & z B_{23}^e & z B_{24}^e \\ x B_{31}^e & x B_{32}^e & x B_{33}^e & x B_{34}^e \\ y B_{31}^e & y B_{32}^e & y B_{33}^e & y B_{34}^e \\ z B_{31}^e & z B_{32}^e & z B_{33}^e & z B_{34}^e \\ x B_{41}^e & x B_{42}^e & x B_{43}^e & x B_{44}^e \\ y B_{41}^e & y B_{42}^e & y B_{43}^e & y B_{44}^e \\ z B_{41}^e & z B_{42}^e & z B_{43}^e & z B_{44}^e \end{bmatrix}$$

- la **matrice symétrique surfacique (3 * 3) locale D^e** , n'intervenant que sur les inconnues températures nodales; ses composantes ayant la forme :

$$D_{ij}^e = - \int_{\Gamma_3^e} h N_j^{T_e} N_i^{T_e} d\Gamma_3^e - \int_{\Gamma_4^e} h_{cd} N_j^{T_e} N_i^{T_e} d\Gamma_4^e.$$

$$D^e = \begin{bmatrix} D_{11}^e & D_{12}^e & D_{13}^e \\ D_{21}^e & D_{22}^e & D_{23}^e \\ D_{31}^e & D_{32}^e & D_{33}^e \end{bmatrix}$$

• Afin de définir correctement le vecteur second membre, nous devons rappeler la définition du **vecteur (4 * 1) local chargement, noté Q^e** , n'intervenant que sur les inconnues températures nodales, avec :

$$Q_i^e = - \int_{\Omega_e} \dot{w} N_i^{T_e} d\Omega_e - \int_{\Gamma_2^e} \phi_{imp} N_i^{T_e} d\Gamma_2^e - \int_{\Gamma_3^e} h T_{ext} N_i^{T_e} d\Gamma_3^e - \int_{\Gamma_4^e} h_{cd} T_{out} N_i^{T_e} d\Gamma_4^e$$

$$\text{et } Q^e = \{Q_1^e, Q_2^e, Q_3^e, Q_4^e\}^\top.$$

Les matrices de capacité \mathbf{M} et de conductivité \mathbf{K} sont symétriques, assez creuses et définies négatives. Lors de l'assemblage de ces dernières, on va se servir de cette propriété de symétrie afin de ne stocker que leur partie diagonale inférieure, grâce à l'utilisation du stockage morse.

Finalement, après assemblage de ces diverses matrices (locales) et vecteur (local), on aboutit au **système global** suivant formé de **(4 * nbnoe) équations à (4 * nbnoe) inconnues U_j** :

$$\boxed{\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}} \quad (3.33)$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} U_j = \{q_{x_j}, q_{y_j}, q_{z_j}, T_j\}^\top : \text{ inconnu au noeud } j \text{ du maillage,} \\ \mathbf{M} : \text{matrice de capacité,} \\ \mathbf{K} : \text{matrice de conductivité,} \\ \mathbf{F} : \text{vecteur des conditions aux limites.} \end{array} \right.$$

3.4 Divers schémas pour l'intégration temporelle

L'utilisation d'éléments finis mixtes linéaires t tra draux P_1/P_1 conduit à l'obtention du système (3.33), avec pour vecteur inconnu, le vecteur \mathbf{U} . L'écriture de ce système est la même que celle obtenue au à 1.2.1.2 lors de l'approximation spatiale (1.32) de l'équation de la chaleur avec une approche GS (la température interpolée par des fonctions continues P_1). Seulement, ici, le vecteur \mathbf{U} regroupe 4 degrés de liberté (la température T et les 3 composantes du flux de chaleur q_x , q_y et q_z) alors que le système (1.32) dépend uniquement du champ de température.

En outre, pour résoudre l'équation (3.33), nous pourrions donc utiliser les mêmes techniques de résolution, précédemment introduites au à 1.2.1.5. Ainsi, nous considérions le schéma aux DF à trois pas de temps. Nous introduisons également un modèle implicite (  deux pas de temps), au niveau de l'assemblage local.

3.4.1 Premier choix : schéma DF à trois pas de temps du second ordre

La résolution du système différentiel (3.33) va se faire en considérant un schéma aux différences finies à trois pas de temps du second ordre (cf p 16).

On rappelle que :

- Le système (3.33) est discrétisé à l'instant $t^* = \alpha_1 t_{n-1} + \alpha_2 t_n + \alpha_3 t_{n+1}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.
- La température T^* va s'écrire $T^* = \alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n + \alpha_3 T_{n+1}$.
- Chaque composante du flux s'écrira aussi $q^{l*} = \alpha_1 q_{n-1}^l + \alpha_2 q_n^l + \alpha_3 q_{n+1}^l \quad \forall l \in [1,3]$.
- Les dérivées temporelles sont également exprimées à l'instant t^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{\Delta t_1} + \frac{\gamma_1 T_n + \gamma_2 T_{n+1}}{\Delta t_2} \\ \frac{\partial \vec{q}^*}{\partial t} = \frac{\beta_1 \vec{q}_{n-1}^* + \beta_2 \vec{q}_n^*}{\Delta t_1} + \frac{\gamma_1 \vec{q}_n^* + \gamma_2 \vec{q}_{n+1}^*}{\Delta t_2} \end{array} \right. \quad \text{avec } \gamma_1 = -\gamma_2, \beta_1 = -\beta_2 = \gamma_2 - 1$$

- L'équation (3.33) se ramène au système :

$$\left[\left(M \frac{\gamma_2}{\alpha_3 dt} + K \right) U^* = F + M \left[\left(\frac{\alpha_1 \gamma_2}{\alpha_3 dt} - \frac{\beta_1}{dt_0} \right) U_{n-1} + \left(\frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_3 dt} - \frac{\beta_2}{dt_0} - \frac{\gamma_1}{dt} \right) U_n \right] \right] \quad (3.34)$$

Remarque 3.3 La particularité de cette écriture nous permet d'avoir recours à plusieurs schémas d'intégration regroupés dans le tableau 1.1 (cf p 18). Avec n'importe quel jeu de paramètres, nous en déduisons l'écriture simplifiée du système linéaire :

$$\boxed{\mathcal{A}U^* = \mathcal{B}} \quad (3.35)$$

3.4.2 Deuxième schéma : schéma implicite à deux pas de temps

En ce qui concerne le second schéma d'intégration temporelle, nous repartons du système différentiel découlant de la discrétisation spatiale (locale) du problème :

$$\begin{cases} A^e \bar{q} + B^e \bar{T} = 0 \\ C^e \frac{d\bar{T}}{dt} + {}^\top B^e \bar{q} + D^e \bar{T} = Q^e \end{cases} \quad (3.36)$$

En envisageant d'utiliser un schéma à caractère implicite, le système ci-dessus se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} A^e \bar{q}^{n+1} + B^e \bar{T}^{n+1} = 0 \\ C^e \frac{\bar{T}^{n+1} - \bar{T}^n}{\Delta t} + {}^\top B^e \bar{q}^{n+1} + D^e \bar{T}^{n+1} = Q^e \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^e \bar{q}^{n+1} + B^e \bar{T}^{n+1} = 0 \\ \left(\frac{C^e}{\Delta t} + D^e \right) \bar{T}^{n+1} + {}^\top B^e \bar{q}^{n+1} = Q^e + \frac{C^e}{\Delta t} \bar{T}^n \end{cases} \quad (3.38)$$

Ou encore, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A^e & B^e \\ {}^\top B^e & \frac{C^e}{\Delta t} + D^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q}^{n+1} \\ \bar{T}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q^e + \frac{C^e}{\Delta t} \bar{T}^n \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

En reprenant les notations introduites au paragraphe § 3.3.3, le système local, muni d'un schéma implicite à deux pas de temps, se réécrit comme suit :

$$\boxed{\left(\frac{M^e}{\Delta t} + K^e \right) \bar{U}^{n+1} = F^e + \frac{M^e}{\Delta t} \bar{U}^n} \quad (3.40)$$

Après assemblage, on sera amené à résoudre le système linéaire de la forme :

$$\boxed{\tilde{\mathcal{A}} U^{n+1} = \tilde{\mathcal{B}}} \quad (3.41)$$

Tous ces schémas seront testés sur un cas analytique (cf § 3.6.1.1) afin d'en estimer leur efficacité et d'en déduire le plus performant. Pour l'instant, c'est le schéma Dupont implicite qui est retenu.

Avant de passer à la résolution de l'un des deux systèmes linéaires (3.35 ou 3.41), nous avons besoin de compléter l'écriture du système en prenant en compte les conditions aux limites thermiques.

3.5 Traitement des conditions aux limites thermiques

Le mécanisme de la prise en compte des conditions aux limites va être différent suivant la nature du transfert thermique. En effet, il est plus simple d'imposer une valeur (donc connue) en un noeud précis que de prendre en compte une fonction dépendant de l'inconnue (ici, la température).

3.5.1 Condition de Dirichlet : température ou flux de chaleur imposé(e)

Dans ce cas, nous choisissons d'utiliser la méthode directe [Rappaz et al. 1998].

Supposons que l'on veuille imposer la valeur \bar{x}^i au degré de liberté i , càd $x^i = \bar{x}^i$. La substitution de cette valeur dans le système assemblé initial $Px = r$ résulte en un nouveau système de même dimension que le premier où tous les termes connus faisant intervenir la valeur \bar{x}^i sont passés au second membre :

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \dots 0 \dots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & \dots 0 \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 - P_{1i} \bar{x}^i \\ \vdots \\ \bar{x}^i \\ \vdots \\ r_n - P_{ni} \bar{x}^i \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Outre les modifications apportées au second membre, on constate qu'il faut aussi modifier la i ème ligne et colonne de la matrice P pour effectivement obtenir $x^i = \bar{x}^i$ en ce degré de liberté, après résolution du système.

Bien évidemment, on applique le même procédé pour toutes les valeurs imposées.

Si l'on revient au système, de forme générale $\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{B}$ avec pour i ème inconnue le vecteur $U_i = \{q_{xi}, q_{yi}, q_{zi}, T_i\}^\top$, nous allons utiliser la même démarche, à part que cette fois-ci, nous avons 4 degrés de liberté par noeud. Par conséquent, on sera soit en mesure de bloquer la valeur nodale en température soit celle du flux de chaleur.

Par exemple, si nous connaissons la température sur le premier noeud ($T_1 = T_{imp}$) et la composante du flux suivant z sur le dernier noeud N ($q_{zn} = Q_{imp}$), la prise en compte de ces deux conditions au niveau du système $\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{B}$ va entraîner les modifications suivantes :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & \ddots & & \vdots \\ a_{n-3,1} & & & \vdots & a_{n-3,n-3} & a_{n-3,n-2} & 0 & a_{n-3,n} \\ a_{n-2,1} & & & \vdots & a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} & 0 & a_{n-2,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{n1} & & & 0 & a_{n,n-3} & a_{n,n-2} & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \\ q_{z1} \\ T_1 \\ \vdots \\ q_{xn} \\ q_{yn} \\ q_{zn} \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - (a_{14} T_{imp} + a_{1,n-1} Q_{imp}) \\ b_2 - (a_{24} T_{imp} + a_{2,n-1} Q_{imp}) \\ b_3 - (a_{34} T_{imp} + a_{3,n-1} Q_{imp}) \\ T_{imp} \\ \vdots \\ b_{n-3} - (a_{n-3,4} T_{imp} + a_{n-3,n-1} Q_{imp}) \\ b_{n-2} - (a_{n-2,4} T_{imp} + a_{n-2,n-1} Q_{imp}) \\ Q_{imp} \\ b_n - (a_{n4} T_{imp} + a_{n,n-1} Q_{imp}) \end{bmatrix}$$

3.5.2 Condition de conduction imposée

3.5.2.1 Interprétation de cette condition aux limites

Si l'on considère une condition de conduction imposée sur le plan $z = 0$ (noté Γ), on aura :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = h_{cd} (T - T_{out}) \Leftrightarrow q_z = -h_{cd} (T - T_{out}) \quad (3.43)$$

On a vu que cette condition intervient dans l'écriture de la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur au niveau du terme :

$$\int_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} h_{cd} (T - T_{out}) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} h_{cd} T \, d\Gamma - \int_{\Gamma} h_{cd} T_{out} \, d\Gamma, \quad (3.44)$$

avec la décomposition d'un premier terme inconnu (puisque T est un champ inconnu) et d'un second terme connu (puisqu'on dispose des valeurs de h_{cd} et T_{out}).

Or si l'on adopte la démarche de la méthode directe, on serait tenté de rajouter la valeur de q_z dans le système global assemblé, cad pour tout noeud i appartenant à la frontière Γ :

$$q_{zi} = -h_{cd}(T_i - T_{out}) \quad \Leftrightarrow \quad q_{zi} + h_{cd}T_i = h_{cd}T_{out} \quad (3.45)$$

Cela reviendrait donc à imposer un flux q_{zi} . Or la valeur de ce flux n'est plus une constante mais elle dépend, à présent, du champ inconnu T_i . Autrement dit, il y a couplage entre ces deux champs inconnus : si nous modifions la matrice assemblée, nous entraînons inévitablement une perte de symétrie de la matrice de raideur.

3.5.2.2 Démarche envisagée

Afin de conserver la symétrie de la matrice de raideur et de pouvoir imposer la valeur du flux q_{zi} , nous avons donc pensé à une stratégie de changement de variable.

– Changement de variable

Il va s'opérer lors de la construction des matrices locales de raideur volumique K_{vol}^e (16*16) et surfacique K_{surf}^e (12*12); autrement dit, avant l'assemblage global. Rappelons alors la forme des 2 matrices de raideur locales :

$$K_{vol}^e = \begin{pmatrix} A^e & B^e \\ {}^T B^e & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_{surf}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^e \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

On considère de nouvelles variables T^* et \vec{q}^* construites de la manière suivante :

$$\begin{cases} \vec{q}^* &= \vec{q} - h_{cd} T \\ T^* &= T \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \vec{q} \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -h_{cd} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}^* \\ T^* \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

– Transformation des matrices

Nous avons dû introduire deux nouvelles matrices locales N_{vol}^e (16*16) et N_{surf}^e (12*12) afin que K_{vol}^{e*} et K_{surf}^{e*} deviennent symétriques, avec :

$$K_{vol}^{e*} = {}^T N_{vol}^e K_{vol}^e N_{vol}^e \quad \text{et} \quad K_{surf}^{e*} = {}^T N_{surf}^e K_{surf}^e N_{surf}^e \quad (3.48)$$

De manière simplifiée, N^e est une matrice identité à laquelle nous avons rajouté le terme h_{cd} au niveau de la connexion entre les inconnues T_i et q_{zi} (pour le i ème noeud). Si l'on prend l'exemple de la matrice surfacique locale avec le couplage sur le 1er noeud, on obtient

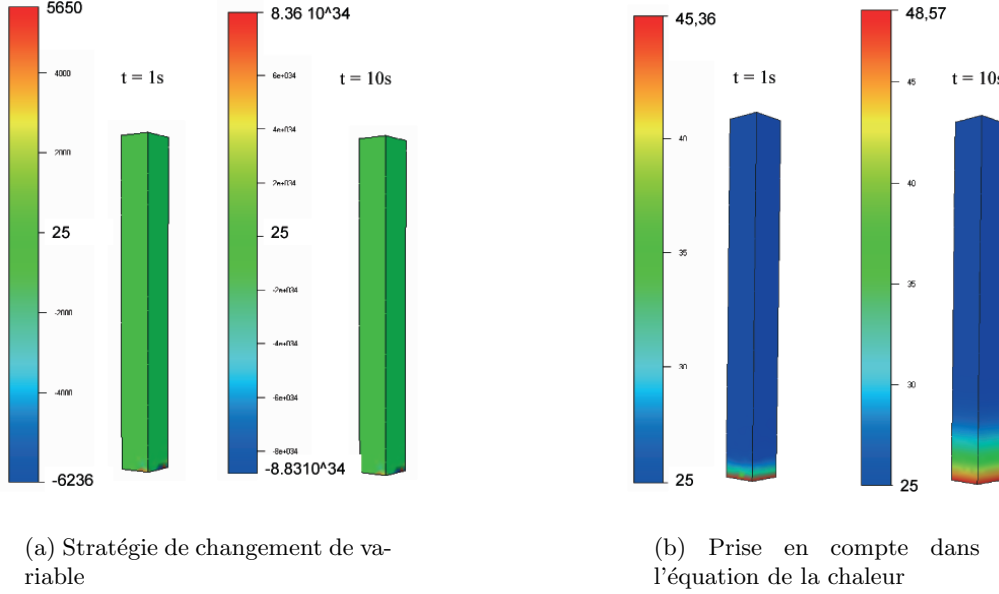


FIG. 3.4 – Test de conduction imposée : $T_0 = 25^\circ C$, $T_{out} = 50^\circ C$ et $h_{cd} = 20\,000\,W/m/^\circ K$.

3.5.2.4 Généralisation à la condition de convection/rayonnement

On peut généraliser cette étude sur le phénomène de convection/rayonnement. Pour les mêmes raisons, cette condition aux limites ne sera prise en compte que dans l'équation de la chaleur avec :

$$\int_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} h (T - T_{ext}) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} h T \, d\Gamma - \int_{\Gamma} h T_{ext} \, d\Gamma, \quad (3.52)$$

soit un terme inconnu dans la matrice de raideur surfacique D et un terme connu dans le second membre (vecteur Q).

3.5.3 Résolution du système linéaire

Après la discrétisation spatio-temporelle du problème thermique mixte et le traitement des diverses conditions aux limites, nous obtenons un système linéaire de la forme :

- $\mathcal{A}U^* = \mathcal{B}$ si l'on utilise un schéma DF à l'ordre 2 (§ 3.4.1),
- ou encore $\tilde{\mathcal{A}}U^{n+1} = \tilde{\mathcal{B}}$ avec un schéma implicite (§ 3.4.2).

Dans les deux cas, le système linéaire est résolu par une méthode itérative. Notre choix s'est porté sur la méthode de gradient conjugué préconditionné par la diagonale [Ciarlet 1991, Ern-Germond 2000]:

- Nous calculons le champ inconnu U^* à l'instant t^* . On retrouvera ensuite l'expression de U_{n+1} à partir de :

$$U^{n+1} = \frac{U^* - (\alpha_1 U^{n-1} + \alpha_2 U^n)}{\alpha_3} \quad (3.53)$$

- Nous calculons directement le champ inconnu U^{n+1} au pas de temps suivant t_{n+1} .

3.6 Validations de la formulation Mixte P_1/P_1 sur des cas tests analytiques

Afin d'évaluer l'efficacité de notre formulation, nous nous proposons de l'appliquer sur trois cas purement thermiques, tous munis d'une solution analytique. Nous reprenons dans un premier temps les tests de température et de flux imposés puis, nous introduisons le test de conduction imposée. Nous verrons que la pertinence du modèle Mixte continu sera déduite d'une comparaison minutieuse avec les schémas discontinus, TGD et Gdimp.

3.6.1 Température imposée sur l'extrémité d'une barre d'acier

Nous commençons l'évaluation de la formulation Mixte par l'étude de ce cas standard, largement développé au cours du chapitre 2. Il va nous permettre de trouver et de déduire le schéma d'intégration temporelle le plus performant qui servira ensuite de référence pour la suite des validations et applications numériques.

3.6.1.1 Analyse de sensibilité au schéma d'intégration temporelle

Tout d'abord, rappelons que les divers schémas d'approximation temporelle, présentés au cours du premier chapitre (§ 1.2.1.5), sont combinés à la formulation Mixte "spatiale" continue P_1/P_1 . Citons les principaux schémas que nous avons intégrés et testés :

- un schéma aux différences finies du second ordre à trois pas de temps (3.34) :

$$\left(M \frac{\gamma_2}{\alpha_3 dt} + K \right) U^* = F + M \left[\left(\frac{\alpha_1 \gamma_2}{\alpha_3 dt} - \frac{\beta_1}{dt_0} \right) U_{n-1} + \left(\frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_3 dt} - \frac{\beta_2}{dt_0} - \frac{\gamma_1}{dt} \right) U_n \right] \quad (3.54)$$

Suivant les valeurs des α_i , β_i et γ_i , nous obtenons quatres schémas :

- * Le schéma de Lees : $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ et $\gamma_2 = \frac{1}{2}$ donc $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$ et $\beta_1 = -\frac{1}{2}$
- * Le schéma de Dupont : $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ et $\gamma_2 = 1$ donc $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{3}{4}$ et $\beta_1 = 0$
- * Le schéma de Dupont implicite : $\alpha_1 = 0$ et $\gamma_2 = \frac{3}{2}$ donc $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ et $\beta_1 = \frac{1}{2}$
- * Le schéma de Crank-Nicholson du second ordre, bien qu'il ne fasse pas apparaître le champ U^{n-1} , peut s'écrire comme un cas particulier des schémas à trois pas de temps : $\alpha_1 = 0$ et $\gamma_2 = 1$ donc $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$ et $\beta_1 = 0$.

- et un schéma implicite à deux pas de temps (3.40), de la forme :

$$\left(\frac{M}{\Delta t} + K \right) U^{n+1} = F + \frac{M}{\Delta t} U^n \quad (3.55)$$

a) Simulation standard

Nous nous plaçons dans le test de référence où la température initiale de la barre est de $800^\circ C$ et la température imposée de $25^\circ C$ sur la face $z = 0mm$. La taille de maille est constante, $h = 2,8mm$. La durée de la simulation est fixée à $30s$ avec un pas de temps $dt = 1s$.

Sur la figure 3.5, nous avons représenté pour chacun des deux capteurs (situés à $10mm$ et $20mm$ du bord régulé thermiquement) l'évolution au cours du temps de la température obtenue

avec les 5 schémas d'intégration temporelle en plus de la solution exacte. Remarquons qu'au niveau du second noeud, aucune fluctuation temporelle n'apparaît quel que soit le schéma utilisé.

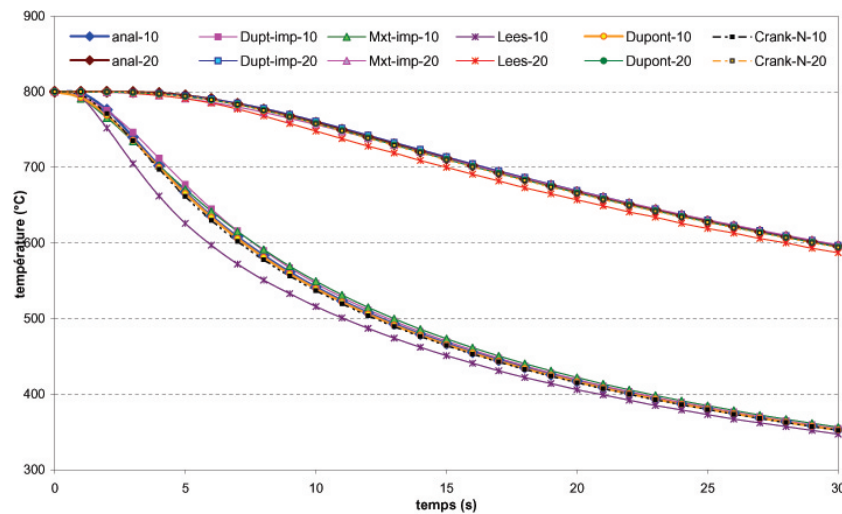


FIG. 3.5 – Evolution de la température des 2 traceurs : comparaison entre la solution analytique et les divers schémas d'intégration temporelle de la formulation Mixte P_1/P_1 .

En outre, à maillage fixé, le schéma de Lees se révèle le moins performant, présentant un écart notable avec les courbes analytiques (3,45% et 1,25% d'erreur). Quant aux autres schémas, ils ont sensiblement la même allure en se superposant avec la solution analytique. Plus précisément, si nous calculons la moyenne du pourcentage d'erreur (avec la formule 2.24) de tous ces schémas (cf tableau 3.1), il en ressort une estimation très précise pour le schéma de Dupont (0,3% et 0,1%), une estimation légèrement moins précise pour le schéma de Dupont implicite et Crank-Nicholson (0,6% et 0,2%) et une estimation encore moins fiable pour le schéma mixte implicite (1,1% et 0,26%).

Par contre, à quelques secondes près, les schémas Dupont et Dupont Implicite sont les plus rapides en temps de résolution thermique.

	Lees	Dupont	Dupont-implicite	Crank-N	Mixte implicite
Erreur $z = 10mm$	3,5%	0,32%	0,67%	0,6%	1,1%
Erreur $z = 20mm$	1,25%	0,13%	0,24%	0,2%	0,26%
Temps CPU	115s	108s	107s	110s	115s

TAB. 3.1 – Erreurs et temps de calculs des cinq schémas d'intégration temporelle.

Si nous regardons, sur la figure 3.6, les isovaleurs de la température obtenues après le premier incrément (après une seconde), nous constatons que les schémas de Lees et de Dupont ne prennent pas correctement en compte la température imposée sur la face $z = 0$, avec l'apparition des températures négatives. Heureusement les autres schémas gèrent parfaitement cette condition aux limites thermiques. De plus, un léger choc thermique de $2,5^\circ C$ ($T_{max} = 802,5^\circ C$) apparaît avec le schéma de Lees.

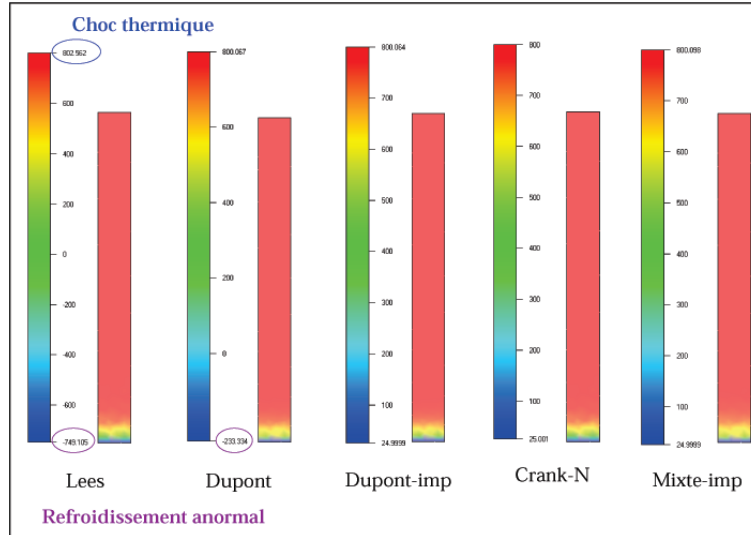


FIG. 3.6 – Isovaleurs de la température après 1 seconde.

Au bout du second incrément (à 2s), le schéma de Dupont arrive à bloquer les noeuds qui ont une température imposée alors que quatre incréments sont nécessaires pour le schéma de Lees. En fin de simulation, la diffusion thermique s'opère sur l'ensemble des schémas avec des valeurs minimales et maximales similaires (cf figure 3.7).

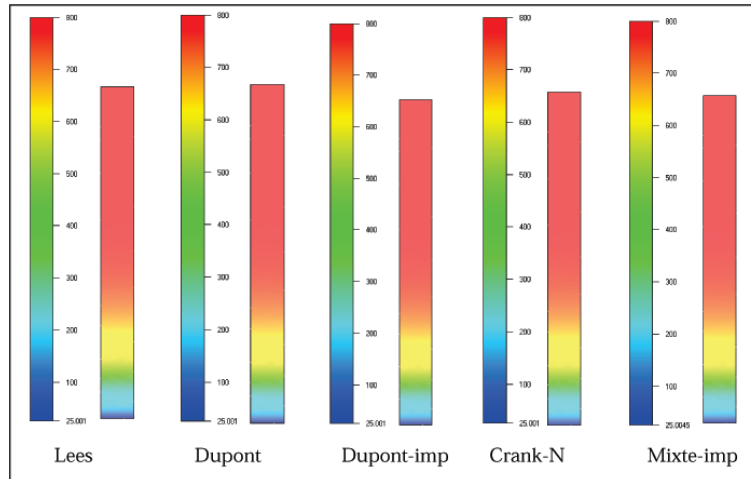


FIG. 3.7 – Isovaleurs de la température après 30 secondes.

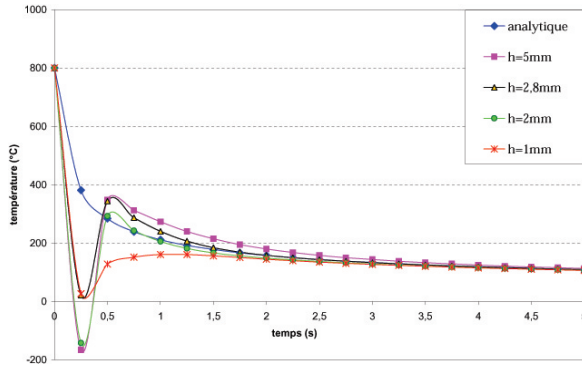
⇒ Pour l'instant, il semblerait que le schéma de Lees soit le moins performant et que le schéma de Dupont implicite soit le plus correct.

Pour confirmer cette hypothèse, nous complétons cette étude à l'aide de deux autres simulations: nous allons raffiner le maillage (en fixant le pas de temps) puis nous envisagerons la variation du pas de temps (avec le maillage fixé).

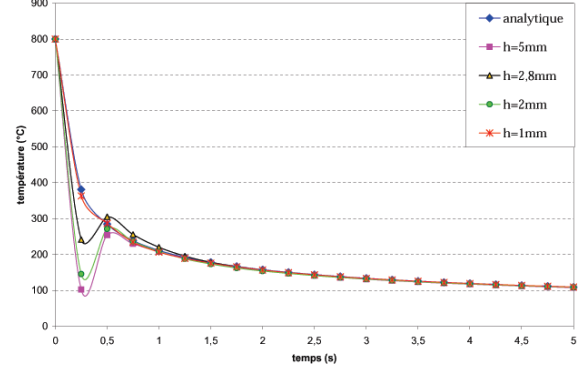
b) Raffinement du maillage

On considère quatre maillages ayant respectivement pour taille de maille constante $h = 5mm$, $h = 2,8mm$, $h = 2mm$ et $h = 1mm$. La simulation dure toujours 30s, avec un pas de temps $dt = 0,25s$.

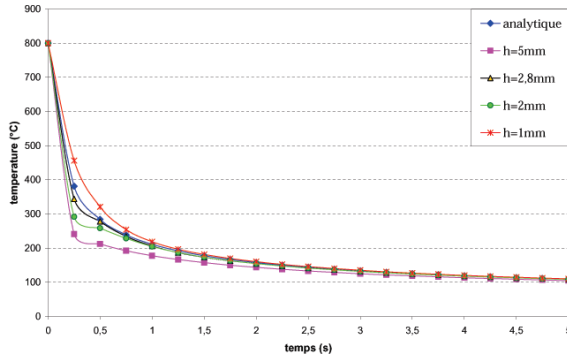
Pour chacun des schémas d'intégration temporelle, nous traçons la solution exacte et l'évolution de la température pour ces quatre maillages. La figure 3.8 représente l'ensemble des courbes pour le capteur situé à 1mm du bord régulé thermiquement, tandis que les évolutions thermiques des capteurs positionnés à 10mm et 20mm sont visibles sur les figures 3.9 et 3.10.



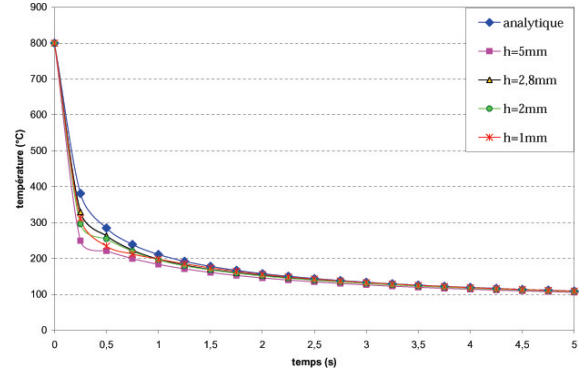
(a) Schéma Lees



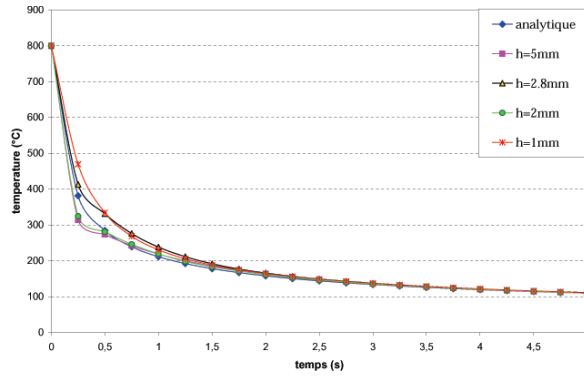
(b) Schéma Dupont



(c) Schéma Dupont implicite



(d) Schéma Crank-Nicholson



(e) Schéma Mixte implicite

FIG. 3.8 – Evolution de la température pour les 5 schémas d'intégration en fonction du maillage avec un capteur en peau à $z = 1\text{mm}$.

De manière générale, la solution numérique devient de plus en plus précise avec un maillage de plus en plus fin. Et bien évidemment, en contre partie, les temps de calculs augmentent (cf tableau 3.2). On peut souligner qu'en terme de rapidité de résolution, c'est le schéma Mixte implicite qui est le plus satisfaisant, suivi du schéma Dupont Implicite.

$[0,30s]$	Lees	Dupont	Dupont-implicite	Crank-N	Mixte implicite
$h = 5mm$	105s	112s	90s	98s	63s
$h = 2,8mm$	6min 30s	6min 25s	6min	6min 32s	4min
$h = 2mm$	21min	19min 35s	18min	20min	13min
$h = 1mm$	44min	42min 30s	44min	43min	29min

TAB. 3.2 – Temps de calculs des cinq schémas d'intégration temporelle.

Sur la figure 3.8, nous constatons des fluctuations anormales de la température aussi bien pour les schémas de Lees et de Dupont. Ces fluctuations sont plus prononcées avec le schéma de Lees : apparition de valeurs négatives de la température se propageant pendant deux incréments. Elles proviennent, entre autre, du fait que la condition de température imposée est initialement mal gérée pour ces deux schémas.

Pour ce qui est du second noeud (à 10mm), des écarts de plus en plus faibles sont observés sur la figure 3.9 entre la solution analytique et la solution numérique dépendant d'un maillage de plus en plus raffiné. Malheureusement, tous ces schémas font apparaître des oscillations de la température, excepté pour le Dupont implicite. Une fois de plus, le schéma de Lees donne les plus grandes oscillations.

On peut également remarquer que les oscillations se produisent uniquement avec les maillages les plus grossiers ($h = 5mm$ et $h = 2,8mm$), ce qui suggère que le rapport entre le pas d'espace (h) et le pas de temps dt (fixé à 0,25s) ne vérifie pas les conditions de stabilité (condition de profondeur de pénétration).

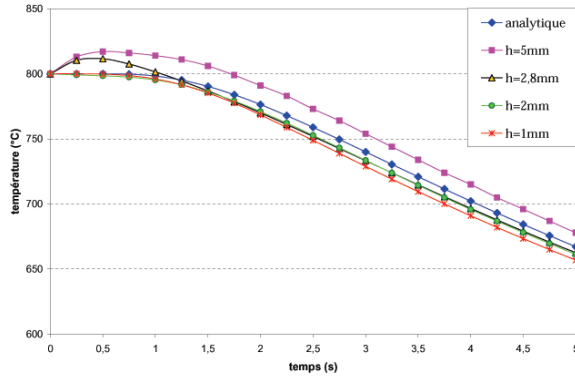
En effet, il faut que $dt \geq \frac{\rho c}{4k} * h^2 = \frac{7800 * 360}{4 * 15} * (0,005)^2$ c'est à dire $dt \geq 1,17s$ alors qu'on le fixe à 0,25s.

Rappelons, de plus que si les oscillations temporelles avaient lieu, elles devraient se produire au niveau du troisième capteur (à 20mm). C'est également le cas avec la formulation mixte continue : seul le schéma Dupont implicite est robuste en n'introduisant aucune fluctuation spatio-temporelle (figure 3.10).

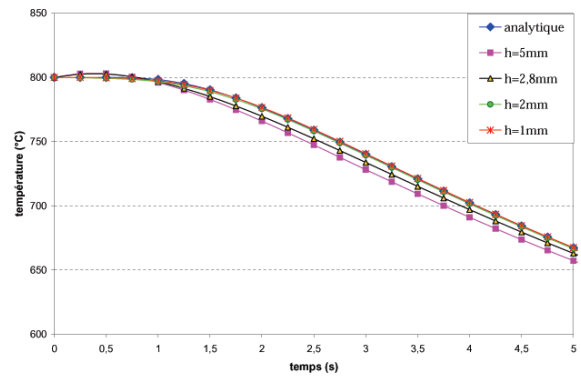
Pour synthétiser l'ensemble des fluctuations engendrées par les divers schémas, nous avons classé, dans le tableau 3.3, la puissance des fluctuations, par ordre décroissant. Nous avons également stipulé quand la condition aux limites en température imposée était correctement prise en compte dès le premier incrément.

	Lees	Dupont	Dupont-implicite	Crank-N	Mixte implicite
Température imposée incrément 1	Non	Non	Oui	Oui	Oui
Fluctuations $z = 10mm$	1 ^{er}	3 ^{ème}	Non	4 ^{ème}	2 nd
Fluctuations $z = 20mm$	1 ^{er}	2 nd	Non	4 ^{ème}	3 ^{ème}

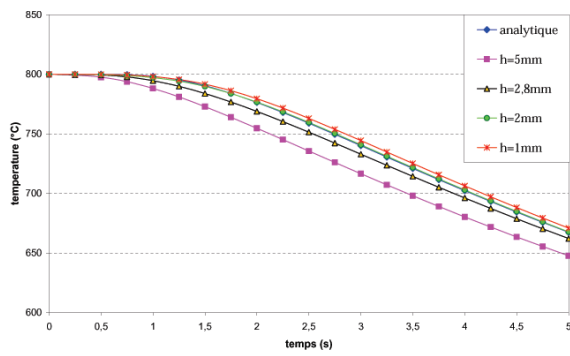
TAB. 3.3 – Raffinement du maillage : synthèse des schémas d'intégration temporelle.



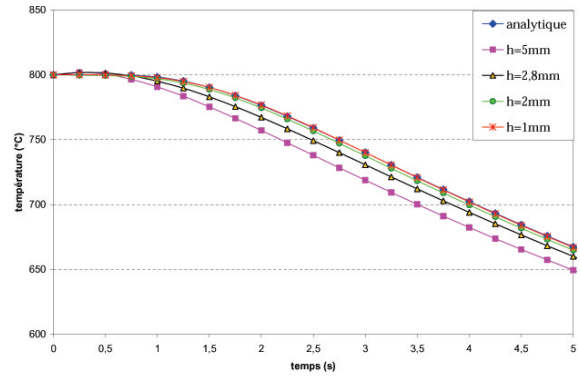
(a) Schéma Lees



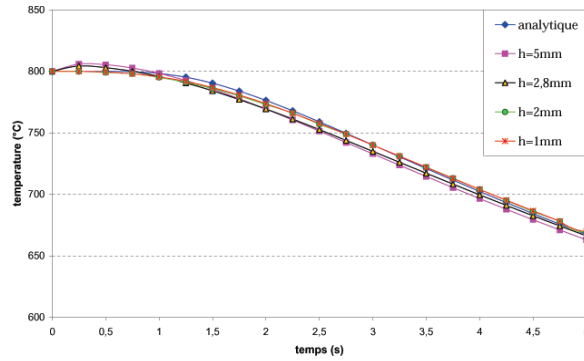
(b) Schéma Dupont



(c) Schéma Dupont implicite



(d) Schéma Crank-Nicholson



(e) Schéma Mixte implicite

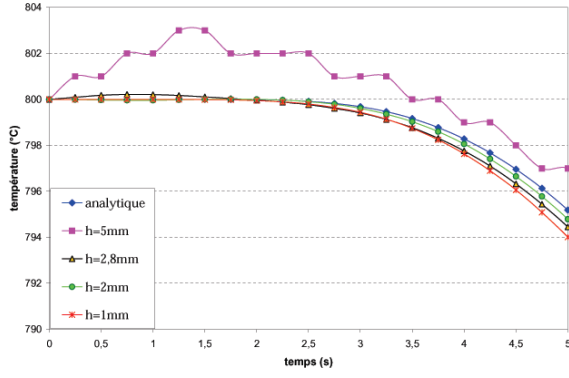
FIG. 3.9 – Evolution de la température pour les 5 schémas d'intégration en fonction du maillage avec un capteur situé à $z = 10\text{mm}$.

Explications

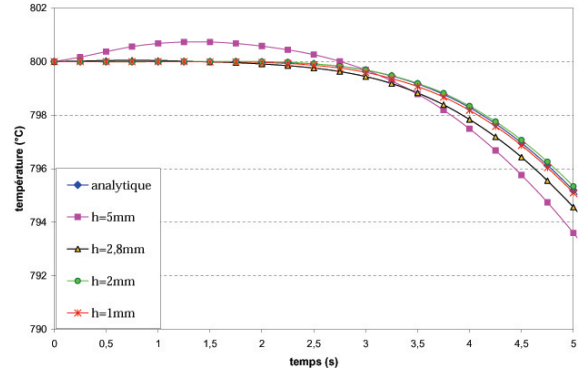
L'ensemble de ces résultats numériques nous permet d'expliquer simplement l'apparition des fluctuations temporelles.

Rappelons que l'on utilise un schéma dans lequel la température T et le flux \vec{q} sont décrits par :

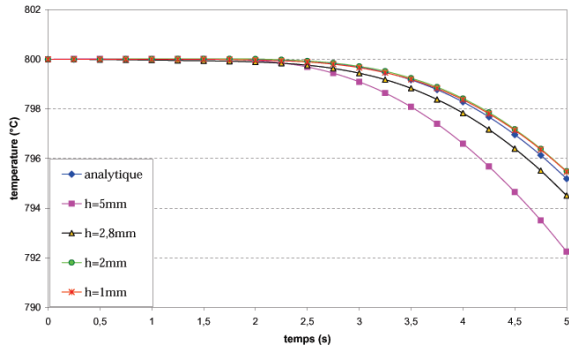
$$\begin{cases} T &= \alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n + \alpha_3 T_{n+1} \\ q^l &= \alpha_1 q_{n-1}^l + \alpha_2 q_n^l + \alpha_3 q_{n+1}^l \quad \forall l \in [1,3] \end{cases}$$



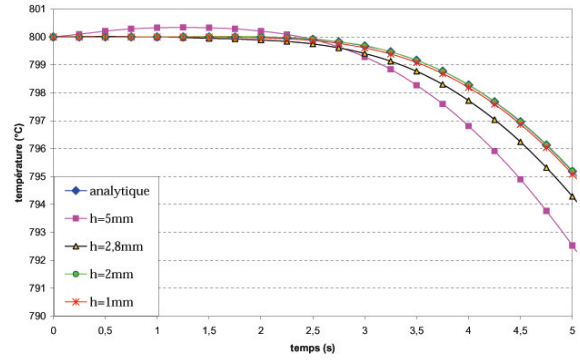
(a) Schéma Lees



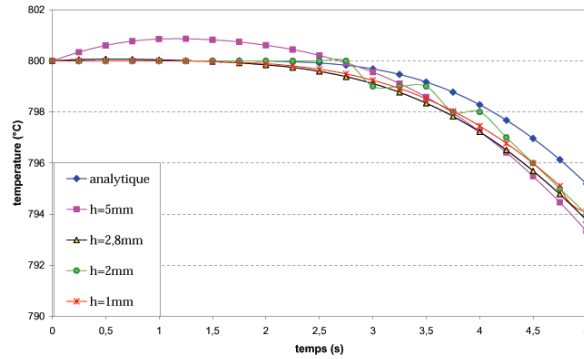
(b) Schéma Dupont



(c) Schéma Dupont implicite



(d) Schéma Crank-Nicholson



(e) Schéma Mixte implicite

FIG. 3.10 – Evolution de la température pour les 5 schémas d'intégration en fonction du maillage avec un capteur situé à $z = 20\text{mm}$.

Si les coefficients α_1 , α_2 et α_3 sont tels qu'ils donnent un poids plus important aux températures et flux passés (T_{n-1} , T_n , \vec{q}_{n-1} et \vec{q}_n) qu'à la température et flux futurs (T_{n+1} et \vec{q}_{n+1}), alors pour obtenir une valeur correcte de T et \vec{q} , le calcul va exagérer les valeurs de T_{n+1} et \vec{q}_{n+1} vers le futur.

Un ou deux incréments après, le processus va s'inverser en donnant une température T_{n+1} et un flux \vec{q}_{n+1} trop tournés vers le passé. On constate alors les fluctuations temporelles.

Remarque 3.4 En étudiant les valeurs des coefficients de tous les schémas d'intégration temporelle, on se rend compte que :

- Le schéma de Lees avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$ est trop tourné vers le passé; ce qui explique les importantes fluctuations temporelles rencontrées en début de simulation.
- Le schéma de Crank-Nicholson avec $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$ et en imposant en tout point $T_{n-1} = T_0$ et $\vec{q}_{n+1} = \vec{q}_0$. Ce schéma est moins tourné vers le passé que le schéma de Lees, mais davantage que le schéma de Dupont.
- Le schéma de Dupont avec $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = 3/4$ donne un poids plus important à T_{n+1} et \vec{q}_{n+1} .
- Même constatation pour le schéma de Dupont implicite avec $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = 1$.

D'autre part, avec de telles conditions de refroidissement très sévères :

- Le schéma de Lees donne des fluctuations énormes avec des valeurs négatives de certaines températures au cours des oscillations.
- Le schéma de Dupont reste raisonnable, comme le schéma de Crank-Nicholson,
- Le schéma de Dupont implicite présente aucune fluctuation.

⇒ Le schéma Dupont implicite semble le plus robuste lors du raffinement du maillage :

- Aucune fluctuation n'est observée au cours de la simulation,
- Le traitement de la condition de température imposée est correct.

c) Raffinement du pas de temps

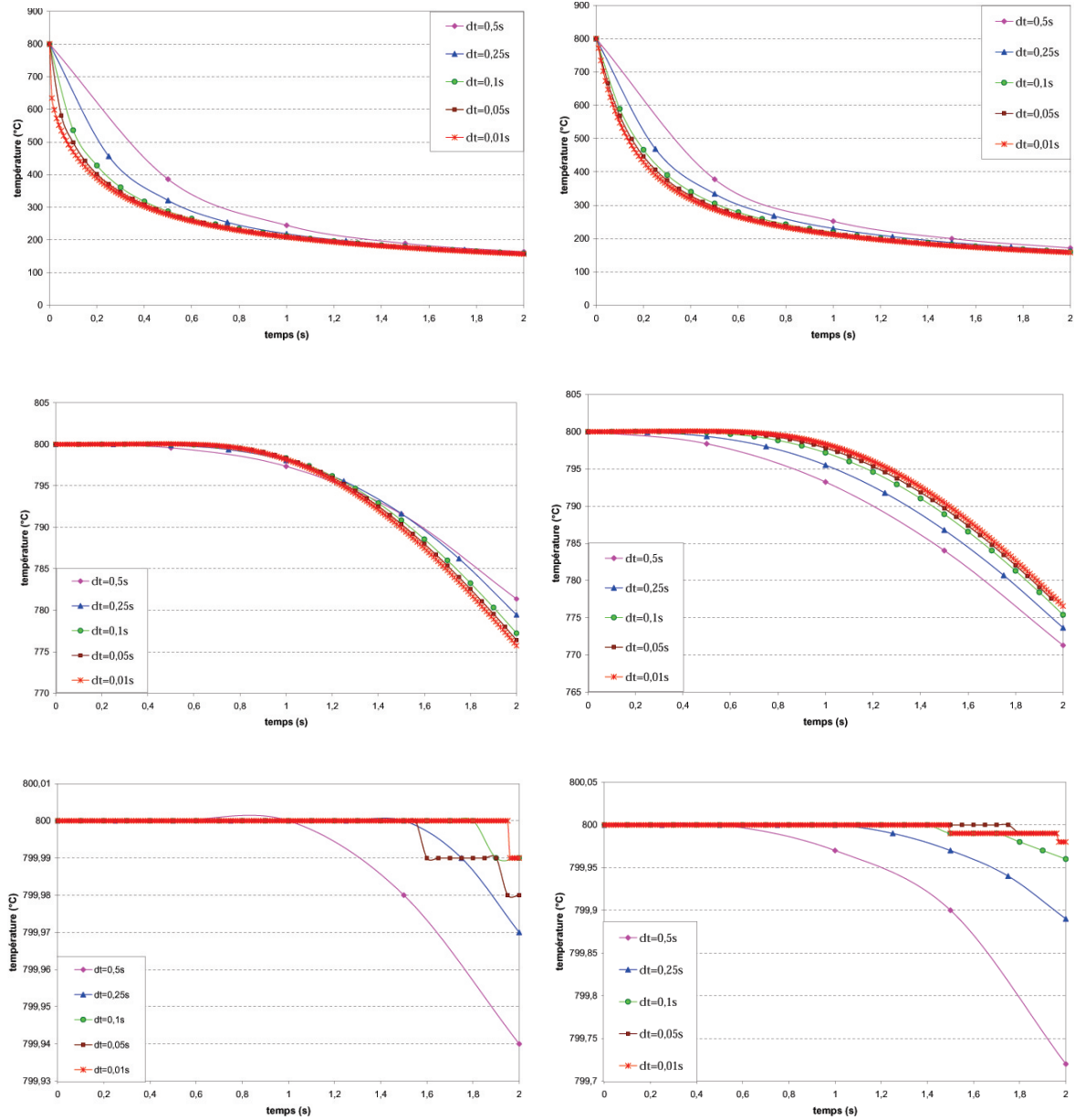
Suite aux résultats sur le raffinement du maillage, nous choisissons de faire ici seulement une comparaison entre les deux schémas implicites : le schéma Dupont implicite et le Mixte implicite. En prenant des pas de temps extrêmement petits compris entre $dt = 0,5$ et $0,01s$, nous regardons ce qui se passe durant les deux premières secondes de la simulation, avec un maillage fin de l'ordre de $h = 1mm$.

La figure 3.11 représente les différentes évolutions thermiques pour les capteurs positionnés à $1mm$, $10mm$ et $20mm$. La solution numérique obtenue à partir des deux schémas implicites devient de plus en plus précise avec un pas de temps de plus en plus petit. En effet, l'écart observé entre la solution exacte et la solution numérique s'amointrit à chaque fois que l'on considère un pas de temps plus rapide. Malheureusement, c'est aux dépens d'un coût de calcul plus élevé. Les tableaux 3.4 et 3.5 permettent de comparer ces deux schémas : le schéma Dupont implicite est le plus précis et le schéma mixte implicite le plus rapide.

$[0,2s]$	$dt = 0,5s$	$dt = 0,25s$	$dt = 0,1s$	$dt = 0,05s$	$dt = 0,01s$
CPU Dupont Imp	2min	3min 30s	7min	13min 30s	64min
CPU Mixte Imp	35s	74s	4min 30s	8min 30s	40min

TAB. 3.4 – Comparaison des temps de calculs des schémas implicites.

Si l'on s'intéresse aux isovaleurs de la température (figures 3.12 et 3.13), on se rend compte que des chocs thermiques se produisent essentiellement sur la première couche des éléments alors qu'ils étaient imperceptibles sur les courbes numériques de la figure 3.11 avec l'absence de réchauffement anormal.



(e) Schéma Dupont implicite

(f) Schéma Mixte implicite

FIG. 3.11 – Evolution thermique des noeuds situés à 1mm, 10mm et 20mm avec $h = 1\text{mm}$.

$[0,2s]$	$z = 1\text{mm}$	$z = 10\text{mm}$	$z = 20\text{mm}$
Erreur Dupont Imp	15% à 2%	0,2% à 0,01%	0,01% à 0,00002%
Erreur Mixte Imp	18% à 1%	0,6% à 0,02%	0,02% à 0,00009%

TAB. 3.5 – Comparaison des pourcentages d'erreurs des schémas implicites.

Ces chocs apparaissent sur les deux schémas dès que le pas de temps $dt \leq 0,1\text{s}$:

- Le choc est violent avec le schéma Mixte implicite puisqu'il atteint une valeur de 947°C (avec $dt = 0,05\text{s}$) alors que le choc engendré par le schéma Dupont implicite est infime (803°C).

- Evidemment le phénomène de choc thermique s'accroît avec un dt encore plus petit, à maillage constant, et dans ce cas, la condition de profondeur de pénétration est encore moins respectée. Par exemple, avec un $dt = 0,01s$, le choc thermique du schéma Dupont implicite atteint une valeur de $833^{\circ}C$ alors que la température max du schéma Mixte implicite explose avec ses $1144^{\circ}C$ et se visualise clairement sur la première couche des éléments.

En effet, si on revient à la définition de la condition de profondeur de pénétration (1.65), il faut nécessairement :

$$dt \geq \frac{\rho c}{4k} * h^2 = \frac{7800 * 360}{4 * 15} * (0,001)^2 \quad \text{càd} \quad dt \geq 0,0468 s$$

Il est donc normal d'obtenir un réchauffement non physique sur les premières couches des éléments dans la barre si l'on choisit un pas de temps inférieure à $0,0468 s$.

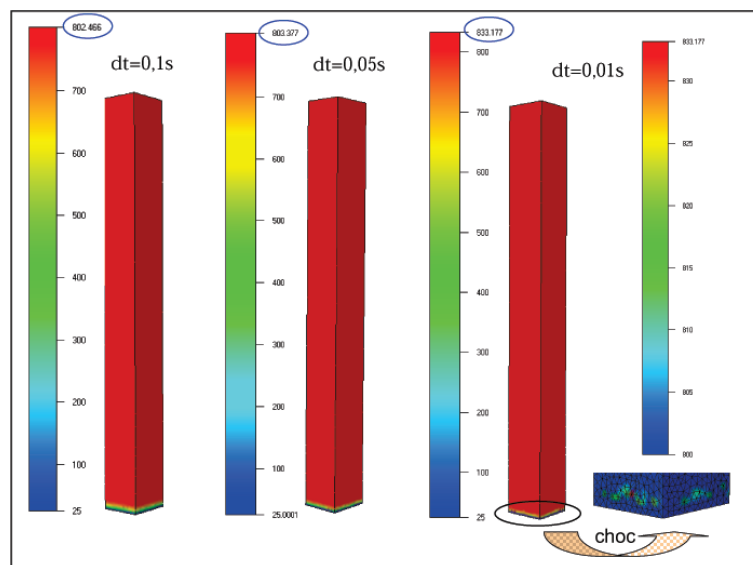


FIG. 3.12 – Isovaleurs de la température du schéma Dupont implicite après un incrément dt .

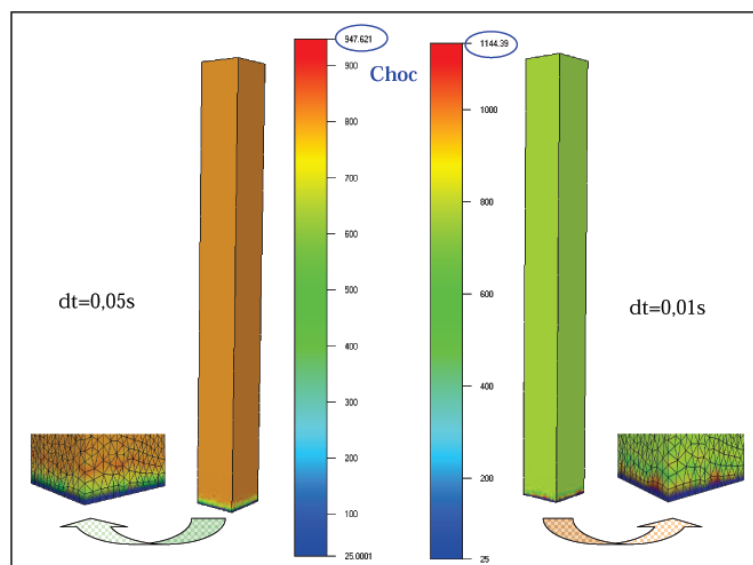


FIG. 3.13 – Isovaleurs de la température du schéma Mixte implicite après un incrément dt .

⇒ Malgré quelques légères fluctuations temporelles de la part du schéma Dupont implicite dès lors que le pas de temps est inférieur à $10^{-1}s$ (pour $h = 1mm$), il semble plus adapté pour résoudre ce type de problème de diffusion que le schéma Mixte implicite. Ce dernier semble plus rapide mais beaucoup moins précis et robuste, en produisant des oscillations très violentes pouvant durer plusieurs incréments.

d) Interprétations des résultats

Nos résultats sont cohérents et coïncident avec ceux obtenus par [Soyris 1990], en arrivant aux mêmes déductions :

- Les fluctuations spatiales proviennent de ce que le pas de temps (dt) et d'espace (h) ne sont pas indépendants. Un maillage grossier nécessite un grand dt mais pour utiliser un petit pas de temps, il faut un maillage fin.
- Les fluctuations temporelles qui apparaissent avec le schéma de Lees peuvent être atténuées par une meilleure initialisation de type Crank-Nicholson ou supprimées par l'utilisation de schémas plus implicites, comme le Dupont et surtout le Dupont implicite.
- Néanmoins ces deux phénomènes ne peuvent être séparés aussi simplement.

⇒ Finalement, à la vue de tous ces résultats, **le schéma de Dupont implicite offre le meilleur compromis en terme de précision et de temps de calculs**, avec une prise en compte de la température imposée dès le premier incrément de la simulation et l'absence d'oscillations non physiques dès qu'on reste dans un jeu de données (dt , h , CL et type de schéma d'intégration) correct (par exemple, pour $dt > 0,1s$ avec $h = 1mm$). Il sera vivement recommandé pour des cas de refroidissement (ou réchauffement) extrêmes (cf § 3.6.1.3.b).

3.6.1.2 Etude complémentaire sur le test de température imposée : résultats numériques en température et flux

Après avoir établi quel était le schéma d'intégration le plus performant pour la formulation Mixte continue P_1/P_1 , nous poursuivons la validation du cas test en température imposée. Nous allons maintenant dresser une étude comparative du modèle Mixte (combiné au schéma Dupont implicite) en fonction de la solution exacte du problème monodimensionnel et des solutions numériques (TGD et Gdimp) précédemment obtenues au cours du chapitre 2.

Rappelons que le refroidissement de cette barre est uniaxial et conduit à l'expression suivante de la solution analytique :

$$T(z,t) = T_{imp} + (T_0 - T_{imp}) * \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \quad (3.56)$$

Cette formulation combinée à la loi de Fourier, nous permet de calculer la solution exacte de la composante z du flux chaleur :

$$q_z(z,t) = -k \frac{\partial T}{\partial z}(z,t) = -k \frac{(T_0 - T_{imp}) \exp\left(\frac{-z^2}{4at}\right)}{\sqrt{\pi at}} \quad (3.57)$$

Rappelons que l'originalité de la formulation Mixte permet d'estimer à chaque instant de la simulation les deux inconnues, température et flux de chaleur. Grâce aux deux solutions analytiques (2.22 et 3.57), nous pourrions suivre et comparer les évolutions de la température mais

aussi celles de la composante q_z du flux de chaleur.

a) Cas standard

Les conditions du cas standard se résument par :

- Température initiale de la barre : $T_0 = 800^\circ C$
- Température imposée sur le plan $z = 0$: $T_{imp} = 25^\circ C$
- Maillage : $h = 2,8 mm$
- Temps de la simulation : 30s avec un pas de temps mécanique dt fixé à 1s
- Données du matériau : $k = 15 W.m^{-1}.K^{-1}$, $\rho = 7800 Kg.m^{-3}$ et $c = 360 J.Kg^{-1}.K^{-1}$

Cela va donc provoquer un phénomène de diffusion thermique dans la barre, en l'occurrence un refroidissement uniaxial, aussi bien visible sur les isovaleurs de la température "Mixte" (figure 3.14) que sur celles de la composante q_z du flux de chaleur (figure 3.15).

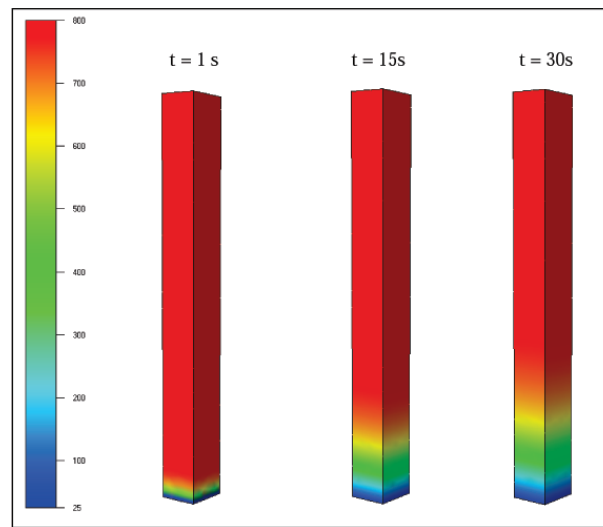


FIG. 3.14 – Isovaleurs de la température au cours de la résolution Mixte : mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.

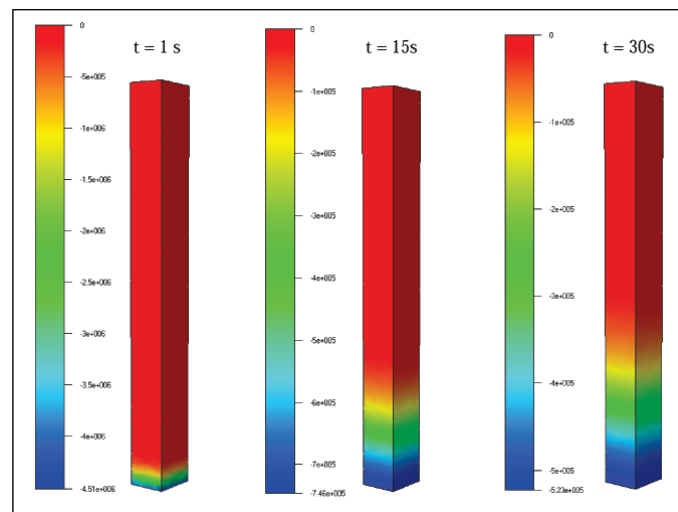


FIG. 3.15 – Isovaleurs de la composante suivant z du flux de chaleur lors de la résolution Mixte continue : mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.

De manière plus précise, évaluons la fiabilité et la précision de cette formulation à l'aide des solutions analytiques et des trois capteurs positionnés respectivement à 1, 10 et 20mm du bord. Les trois tracés analytiques et numériques, représentés sur la figure 3.16, montrent bien la pertinence du modèle continu, avec des courbes approximant correctement les solutions exactes, et avec des écarts infiniment petits. Avec un maillage moyennement grossier, ces résultats sont excellents avec une moyenne d'erreur de l'ordre de 0,6% pour $z = 10\text{mm}$ et de 0,2% pour $z = 20\text{mm}$.

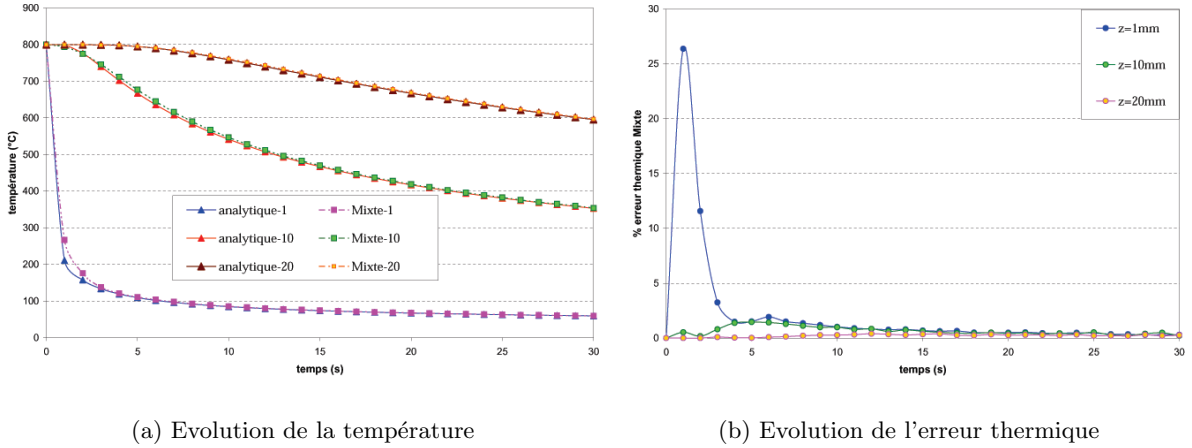


FIG. 3.16 – Comparaison entre la formulation Mixte continue et la solution analytique.

On peut juste remarquer sur la figure 3.16(a) un léger décalage en début de simulation pour le noeud situé en peau. Ce décalage se répercute sur l'estimation de l'erreur (2%), avec une pointe notoire de 26% au premier incrément, mise en évidence sur la figure 3.16(b).

Si l'on s'intéresse à présent à l'évolution au cours du temps de la composante q_z du flux de chaleur, on comprend mieux d'où provient ce décalage : en fait, c'est un petit problème d'initialisation qui entraîne, au premier incrément, un écart assez important entre la courbe analytique et numérique (cf figure 3.17).

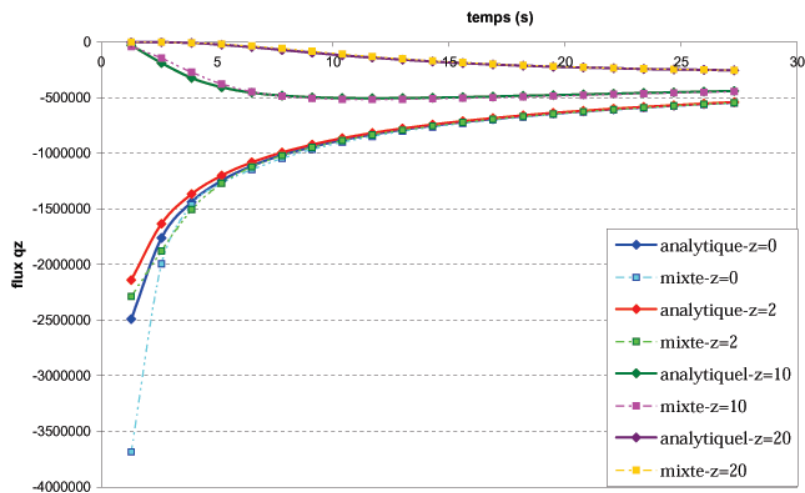


FIG. 3.17 – Evolution du flux q_z : comparaison entre la solution analytique et la formulation Mixte de Forge3[®].

En effet, pour simplifier l'initialisation du flux dans le code de calculs Forge3[®], nous avons arbitrairement choisi de lui affecter le vecteur nul ($\vec{q}_0 = \vec{0}$). Néanmoins, pour le test de température imposée, si on se réfère à sa solution analytique (3.57), q_z tend vers $-\infty$ quand $z \rightarrow 0$. Par conséquent, le calcul de la première valeur de q_z est erronée, à cause de notre choix d'initialisation.

Malgré ce problème d'initialisation, une tendance correcte des courbes numériques du flux est obtenue pour l'ensemble des capteurs (situés à 0, 2, 10 et 20mm du bord imposé).

En rajoutant les résultats TGD et Gdimp sur la figure 3.18, on s'aperçoit que la formulation Mixte est la plus précise et obtient même la meilleure estimation de la température pour le capteur placé en peau, avec seulement 2% contre 3,3% et 22%. Sa robustesse est également mise en évidence grâce au tableau 3.6 qui dresse les temps de résolution et les moyennes de l'erreur des trois modèles. On note cependant une formulation Mixte légèrement moins rapide que le Gdimp.

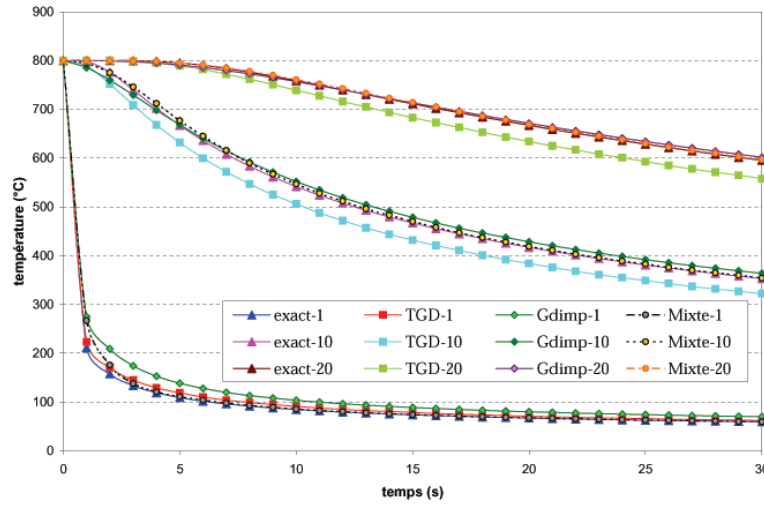


FIG. 3.18 – Evolution de la température : comparaison entre l'analytique, le TGD, le Gdimp et la formulation Mixte sur le test standard de température imposée.

[0,30s]	TGD	Gdimp	Mixte
CPU	157s	103s	105s
erreur $z = 1mm$	3,3%	22%	2%
erreur $z = 10mm$	7%	2,2%	0,6%
erreur $z = 20mm$	3,6%	0,5%	0,2%

TAB. 3.6 – Comparaison des temps de calculs et des erreurs moyennes pour les 3 modèles.

⇒ Sur le cas standard de température imposée, la formulation Mixte se révèle très robuste, avec une excellente précision (même sur maillage moyennement grossier) et avec un temps de résolution très raisonnable.

b) Comparaison entre l'utilisation d'un maillage structuré et non structuré

Pour compléter cette étude, on s'intéresse ici au comportement de la solution numérique avec un maillage structuré puis non structuré, avec une taille de maille constante ($h = 2,5mm$).

Comme on peut le voir sur les figures 3.19 et 3.20, les évolutions de la température et du flux q_z sont similaires avec des maillages structuré et non structuré. En terme de précision, les estimations des erreurs thermiques sont quasiment les mêmes : pour le noeud placé à 10mm, 0,8% avec un maillage structuré et 0,7% avec un maillage non structuré et respectivement 0,3% et 0,2% pour le second noeud placé à 20mm.

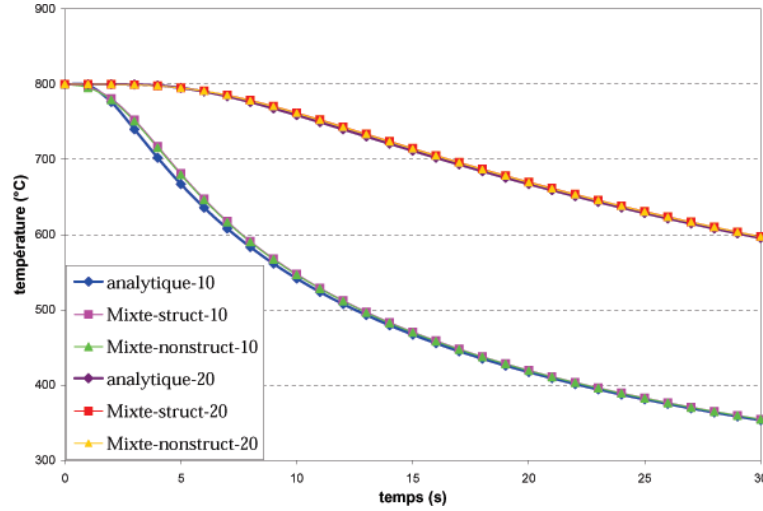


FIG. 3.19 – Influence du mode de triangulation sur l'évolution de la température "Mixte".

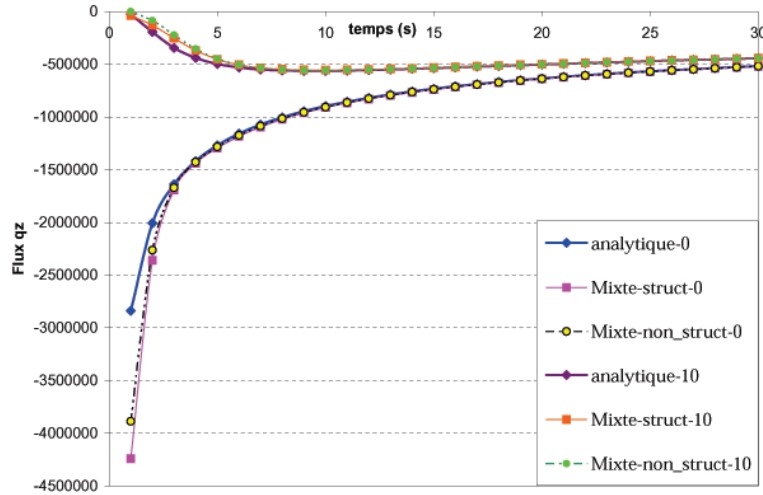


FIG. 3.20 – Influence du mode triangulation sur l'évolution du flux q_z avec $h = 2,5mm$.

Par comparaison aux modèles discontinus (cf tableau 3.7), la formulation Mixte apparaît la plus fiable (en terme de précision) mais toujours moins rapide que le Gdimp.

⇒ La formulation Mixte reste stable vis-à-vis du mode de triangulation du maillage : la même précision est obtenue avec un maillage structuré ou non structuré, tandis que le TGD et Gdimp diffèrent légèrement (le TGD plus précis avec un maillage non structuré tandis que le Gdimp est plus précis avec un maillage structuré.)

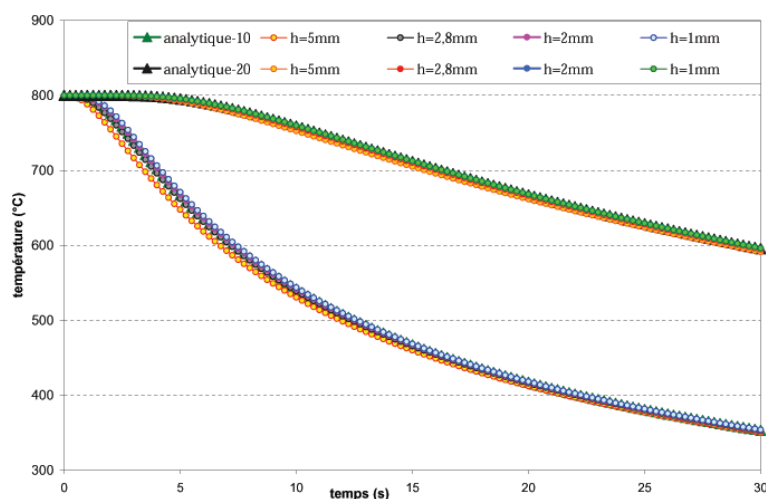
[0,30s]	TGD	Gdimp	Mixte
CPU maillage structuré	4min 25s	64s	2min 33s
CPU maillage non structuré	4min 30s	74s	2min 54s
erreur $z = 10mm$ maillage structuré	8,3%	0,4%	0,8%
erreur $z = 10mm$ maillage non structuré	6,3%	2,6%	0,7%
erreur $z = 20mm$ maillage structuré	4,1%	0,46%	0,3%
erreur $z = 20mm$ maillage non structuré	3%	1,2%	0,2%

TAB. 3.7 – Comparaison des temps de calculs et des pourcentages d'erreurs des 3 modèles.

c) Raffinement du maillage

Le pas de temps étant fixé à $dt = 0,25s$, on étudie le comportement de la solution numérique "Mixte" en prenant des maillages de plus en plus grossiers.

Les différentes évolutions de la température (obtenues avec la solution analytique et la formulation Mixte) sont représentées sur la figure 3.21, pour des noeuds localisés à 10 et 20mm du bord. Quel que soit le maillage utilisé avec le pas de temps fixé à 0,25s, une bonne concordance des résultats est obtenue sans apparition d'oscillation spatio-temporelle. Les résultats Mixtes sont déjà très encourageants avec un maillage grossier (1,66% et 0,7%), et incontestablement meilleurs qu'avec le schéma TGD (9,3% et 4,8%) ou le modèle Gdimp (1,36% et 1,38%).

FIG. 3.21 – Influence du raffinement du maillage sur l'évolution de la température avec une résolution Mixte P_1/P_1 .

On retrouve le même comportement que celui déjà obtenu et établi pour le TGD et le Gdimp : "La solution numérique coïncide d'autant mieux avec la solution analytique que le maillage est fin; autrement dit, plus le maillage est grossier, plus l'estimation de la température est imprécise et plus l'erreur est importante (figure 3.22), avec des temps de résolution thermique plus courts (tableau 3.8)."

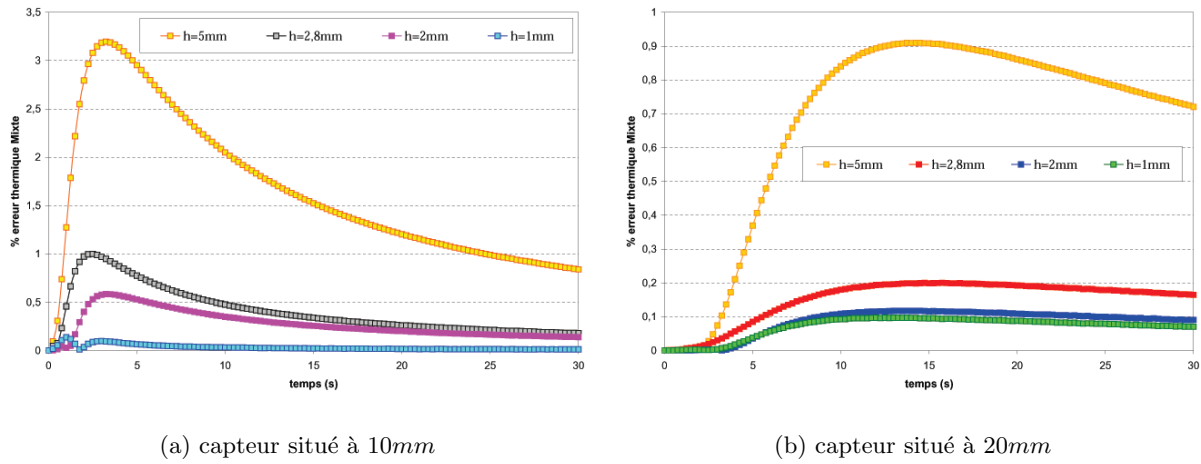
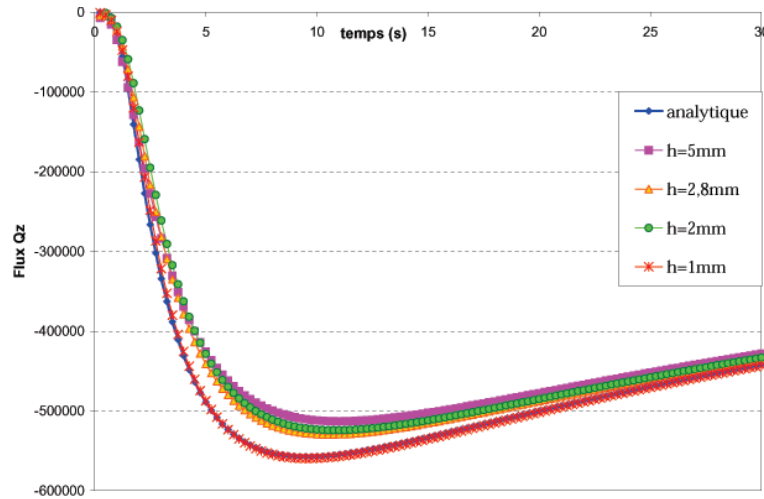


FIG. 3.22 – Evolution de l'erreur thermique "Mixte" en fonction du raffinement du maillage.

Ce comportement s'accroît avec l'évolution du flux q_z , représentée sur la figure 3.23, en passant de 7% à 1% d'erreur.

FIG. 3.23 – Raffinement du maillage à pas de temps fixé : évolution de la composante q_z du flux pour $z = 10mm$.

Si on se réfère au temps des calculs du tableau 2.17 de la page 105, la formulation Mixte se révèle toujours plus rapide que le TGD, mais plus lente que le Gdimp. Par contre, en terme de précision, c'est incontestablement la plus performante.

$[0,30\text{ s}]$	$h = 5\text{ mm}$	$h = 2,8\text{ mm}$	$h = 2\text{ mm}$	$h = 1\text{ mm}$
CPU Mixte	90 s	6 min	18 min	44 min
% erreur Mixte $z = 10mm$	1,66%	0,41%	0,2%	0,03%
% erreur Mixte $z = 20mm$	0,68%	0,15%	0,08%	0,07%

TAB. 3.8 – Temps de calculs et pourcentages de l'erreur pour la formulation Mixte continue.

⇒ La formulation Mixte est sensible au raffinement du maillage, avec une sensibilité moins prononcée que celle du TGD et du Gdimp, une bonne précision et des temps de calculs satisfaisants.

d) Raffinement du pas de temps

Après avoir établi une certaine influence du maillage sur la solution numérique Mixte, on regarde ce qu'il en est quand on fait varier le pas de temps dt , sachant que le maillage est maintenant fixé à $h = 1mm$.

Pour l'évolution de la température, on s'intéresse aux capteurs situés à 1, 10 et 20mm du bord, comme en témoignent les figures 3.24(a), 3.25(a) et 3.26(a). Il s'avère que la solution numérique Mixte est d'autant plus précise que le pas de temps est petit, avec un rapprochement de plus en plus visible des courbes numériques vers la solution analytique (tracée pour $dt = 0,25s$). En fait, l'erreur moyenne diminue, en passant de 14% à 0,7% pour $z = 1mm$, 7,6% à 0,3% pour $z = 10mm$ et de 2,7% à 0,08% pour $z = 20mm$ (figures 3.24(b), 3.25(b) et 3.26(b)).

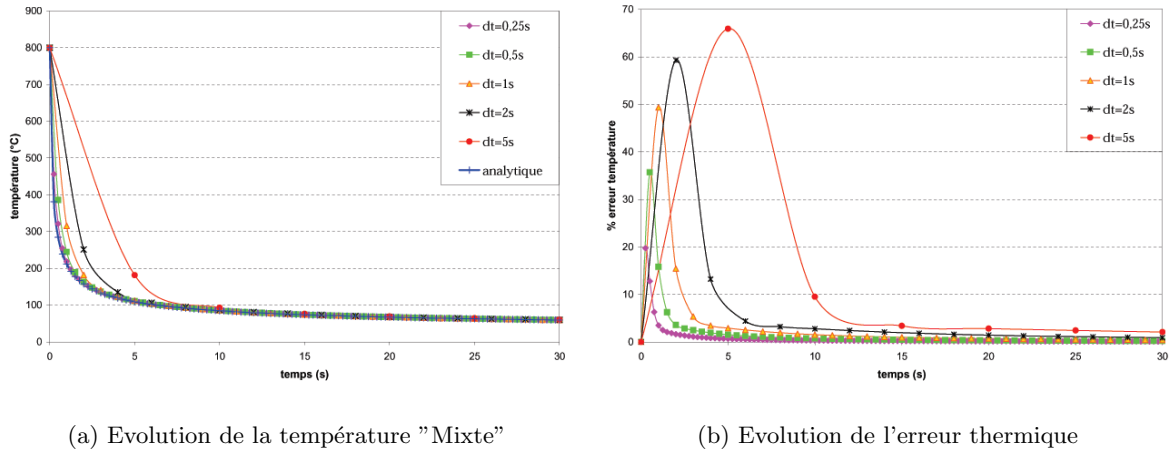


FIG. 3.24 – Influence du pas de temps dt : noeud situé à 1mm avec $h = 1mm$.

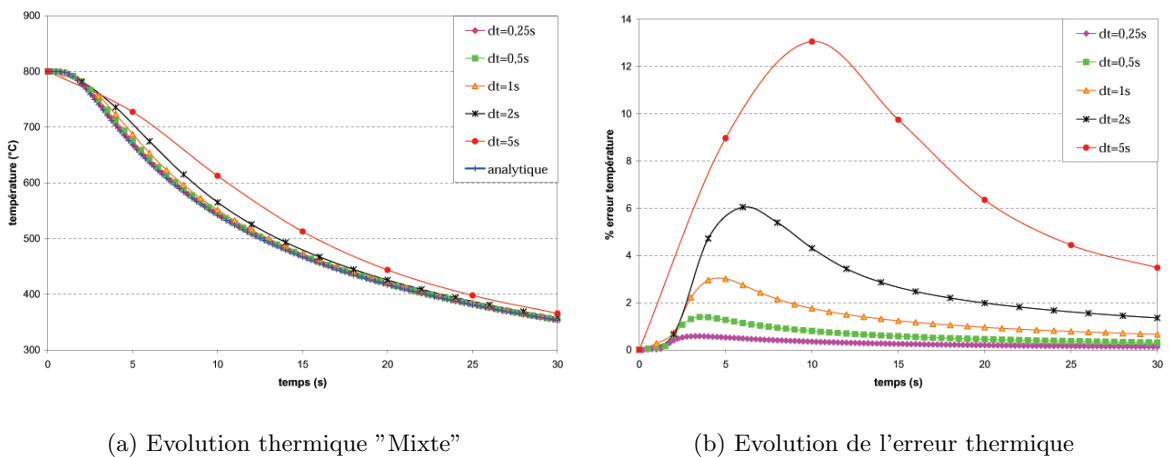
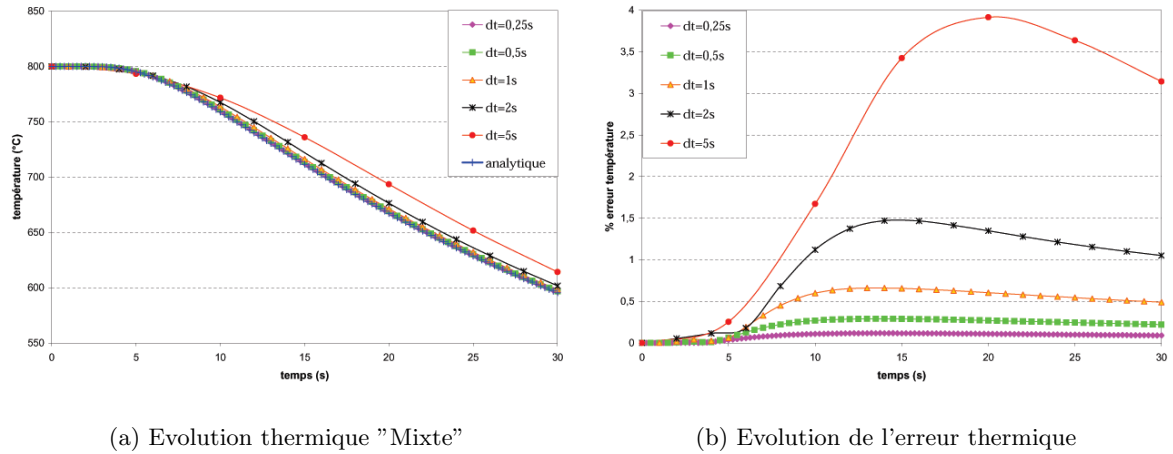


FIG. 3.25 – Influence du pas de temps dt : noeud situé à 10mm avec $h = 1mm$.

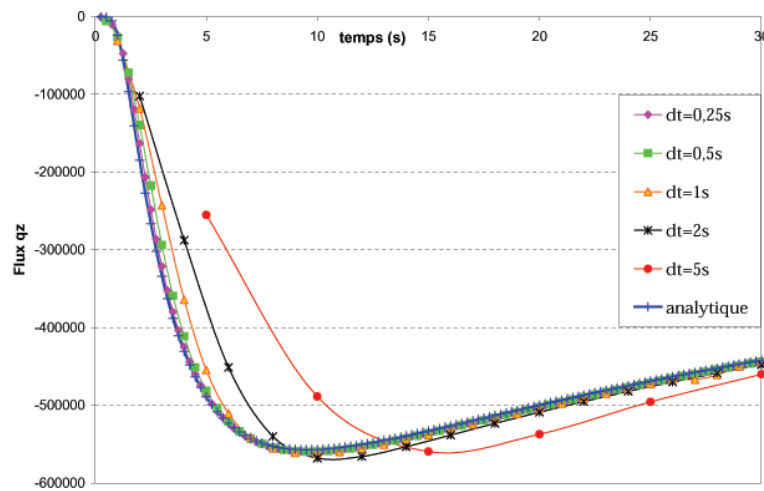
Bien que l'erreur diminue, le tableau 3.9 nous indique une augmentation significative des temps de calcul. En comparant ces valeurs aux tableaux 2.6 du TGD et 2.18 du Gdimp, cette augmentation reste raisonnable.

FIG. 3.26 – Influence du pas de temps dt : noeud situé à 20mm avec $h = 1\text{mm}$.

$[0, 30\text{ s}]$	$dt = 5\text{ s}$	$dt = 2\text{ s}$	$dt = 1\text{ s}$	$dt = 0,5\text{ s}$	$dt = 0,25\text{ s}$
CPU	4min 20s	8min 30s	15min	26min	44 min

TAB. 3.9 – Comparaison des temps de calcul de la formulation Mixte continue.

En ce qui concerne la composante q_z du flux de chaleur, le même phénomène est constaté :
 " Le modèle Mixte continu est de moins en moins précis avec de plus grands pas de temps qui entraînent une réduction des coûts de calcul ".

FIG. 3.27 – Influence du pas de temps dt sur l'évolution du flux q_z avec $z = 10\text{mm}$.

Il est important de spécifier que les plus grandes valeurs de dt ne produisent pas d'oscillations non physiques aussi bien au niveau de l'évolution de la température que de celle du flux.

⇒ La formulation Mixte est sensible au pas de temps et devient naturellement plus précise et robuste lorsque ce pas est petit.

3.6.1.3 Validation du test de température imposée sur deux cas extrêmes

Dans cette partie, nous étudions deux cas extrêmes afin de s'assurer de la robustesse de la formulation Mixte et, par la même occasion, de celle des deux modèles discontinus :

- prolonger le calcul jusqu'à l'équilibre thermique,
- choisir un gradient de température imposé très grand afin de produire un choc thermique violent.

a) Equilibre thermique

Pour cette simulation, nous conservons une température initiale de $800^{\circ}C$, une température imposée de $25^{\circ}C$ et un maillage de $2,8mm$. Par contre, on considère une durée totale de $10\,000s$ avec un pas de temps fixé à $250s$.

Sur la figure 3.28, nous avons uniquement représenté l'évolution de la température pour le capteur situé à $z = 10mm$. Comme on peut le voir, l'équilibre thermique est parfaitement atteint pour les trois modèles numériques, au bout de quelques incréments. On observe cependant que cet équilibre est obtenu plus rapidement avec les modèles numériques qu'avec la solution exacte, puisque nous avons utilisé une barre finie de $(10 \times 10 \times 100mm)$ alors que la solution analytique est définie dans le cas d'un milieu semi-infini ($\lim_{t \rightarrow +\infty} T(z,t) = 25^{\circ}C$). Ce qui sous entend que les trois modèles refroidissent plus vite.

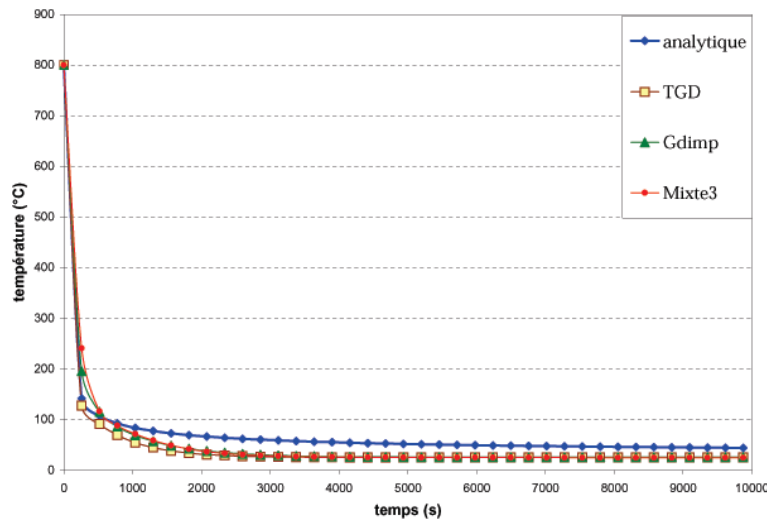


FIG. 3.28 – Apparition de l'équilibre thermique : noeud situé à $z = 10mm$.

On peut aussi remarquer que le coût de calcul est très important pour la résolution TGD ($21h40min$) alors que le Gdimp n'a besoin que de $28min$ et la formulation Mixte que de quelques minutes ($6min$).

⇒ L'équilibre thermique est parfaitement atteint avec les trois modèles numériques, en donnant des résultats très similaires et une convergence très rapide pour la résolution avec la formulation Mixte.

b) Choc thermique très violent

On s'intéresse, ici, à des conditions extrêmes de refroidissement :

- $T_0 = 1000^\circ C$ et $T_{imp} = 25^\circ C$,
- Durée de la simulation $0,5s$ avec $dt = 0,01s$,
- Le maillage est fin : $h = 1mm$.

Sur la figure 3.29, nous comparons les solutions numériques TGD, Gdimp et Mixte à l'analytique. L'allure générale des courbes semble correcte, quel que soit le modèle numérique utilisé. Le plus faible écart entre la solution exacte et la courbe numérique est obtenu avec la formulation Mixte (0,2% et 0,003%). On peut cependant souligner que les modèles discontinus donnent de bons résultats avec 0,5% et 0,0007% pour le TGD et 0,35% et 0,0004% pour le Gdimp. Par contre, pour ce test, le coût de calcul de la méthode Mixte est plus important (16min) que celui du Gdimp (7min) et même du TGD (10min30s).

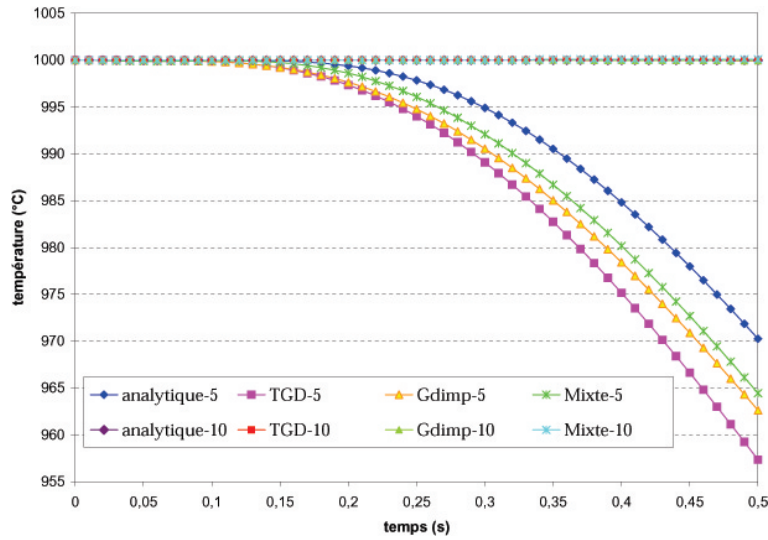


FIG. 3.29 – Evolution de la température pour les noeuds situés à 5 et 10mm du bord imposé.

De plus, les isovaleurs montrent qu'en début de simulation, la méthode Mixte est la seule à faire apparaître un réchauffement anormal, localisé sur quelques noeuds. Par exemple, le réchauffement maximal a lieu au niveau du noeud de coordonnées (0; 4,3; 1,8). Si l'on trace son évolution thermique (figure 3.30), le phénomène non physique est clairement mis en évidence, pour la résolution Mixte. Par contre, il est intéressant de remarquer que les méthodes TGD et Gdimp sont plus robustes en ne faisant pas apparaître de tels phénomènes, en ce noeud ou ailleurs.

⇒ La formulation Mixte se révèle fiable et suffisamment robuste même quand le refroidissement/réchauffement est très sévère. Par contre, si le pas de temps est inférieur à $10^{-2}s$, des oscillations non physiques peuvent localement se produire, contrairement au TGD et Gdimp, robustes en toute circonstance.

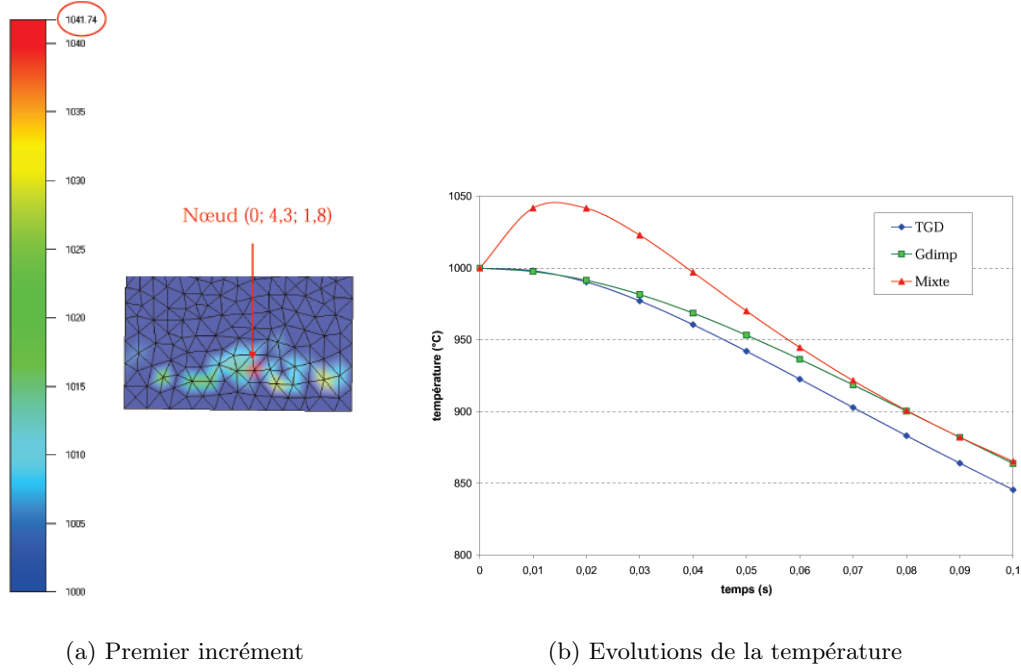


FIG. 3.30 – Mise en évidence du choc thermique avec la formulation Mixte.

3.6.1.4 Conclusions

Grâce à une étude comparative sur le cas test analytique en température imposée, nous avons pu valider, la formulation Mixte continue P_1/P_1 munie du schéma Dupont implicite, qui se trouve être la plus performante.

L'ensemble des résultats numériques établis nous permet d'assurer que ce modèle est robuste et fiable, avec une grande précision (même sur maillage grossier) et avec un temps de résolution tout à fait raisonnable.

Ce modèle reste cependant sensible au raffinement du maillage et au pas de temps.

D'autre part, en prolongeant la durée de la simulation, la formulation Mixte, tout comme le TGD et le Gdimp, permettent d'atteindre l'équilibre thermique.

Néanmoins, lorsqu'il s'agit de chocs thermiques extrêmement violents, avec un maillage fin et un pas de temps très petit (inférieur à $0,01s$), le modèle Mixte perd de la stabilité avec l'apparition locale de phénomènes non physiques qui ne se produisent pas avec les deux modèles discontinus (beaucoup plus robustes dans cette configuration).

3.6.2 Flux imposé sur l'extrémité d'une barre d'acier

Dans ce paragraphe, on se propose maintenant de valider la formulation Mixte P_1 sur le test de flux imposé, sachant que nous aurons, en plus, plusieurs résultats numériques (GS asynchrone, TGD et Gdimp de Forge3[®]) indispensables pour établir la comparaison.

Rappelons que le réchauffement de la barre est uniaxial (dans la direction de la diffusion thermique, ici l'axe z) et conduit à l'expression suivante de la solution analytique :

$$T(z,t) = T_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Phi_{imp} \sqrt{a}}{k} \sqrt{t} * \exp\left(\frac{-z^2}{4at}\right) - \frac{\Phi_{imp} z}{k} * \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) \quad (3.58)$$

Cette formulation combinée à la loi de Fourier, nous permet d'établir la solution exacte de la composante z du flux de chaleur \vec{q} :

$$q_z(z,t) = -k \left[\frac{-\Phi_{imp} \sqrt{a t} z \exp\left(\frac{-z^2}{4at}\right)}{k t a \sqrt{\pi}} - \frac{\Phi_{imp} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)}{k} + \frac{\Phi_{imp} z \exp\left(\frac{-z^2}{4at}\right)}{k \sqrt{\pi a t}} \right] \quad (3.59)$$

Le cas particulier $z = 0$ simplifie les solutions analytiques (3.58) et (3.59) avec :

$$\begin{cases} T(0,t) = T_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Phi_{imp}}{\sqrt{k \rho c}} \sqrt{t} \\ q_z(0,t) = \Phi_{imp} \end{cases} \quad (3.60)$$

Grâce à ces différentes solutions analytiques, nous pourrions suivre et comparer les évolutions de la température mais aussi celles de la composante suivant z du flux de chaleur.

3.6.2.1 Cas standard

Les conditions du cas standard sont résumées par :

- Température initiale de la barre : $T_0 = 25^\circ C$
- Température imposée sur le plan $z = 0$: $\Phi_{imp} = 1 \text{ MW/m}^2$
- Maillage : $h = 2,3 \text{ mm}$
- Temps de la simulation : $30s$ avec un pas de temps mécanique dt fixé à $1s$
- Données du matériau : $k = 15 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$, $\rho = 7800 \text{ Kg.m}^{-3}$ et $c = 360 \text{ J.Kg}^{-1}.K^{-1}$

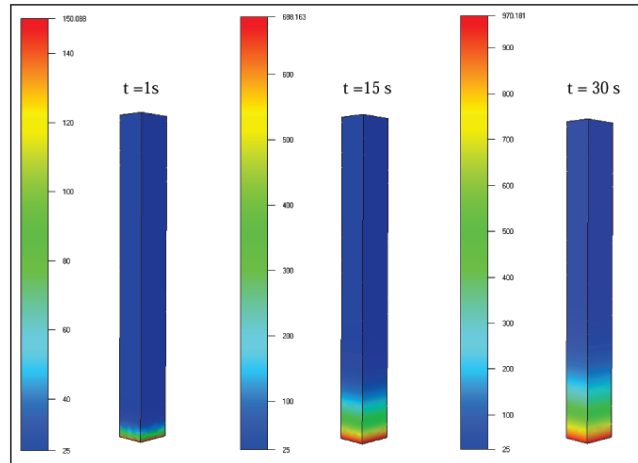


FIG. 3.31 – Isovaleurs de la température au cours de la résolution Mixte : mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.

La mise en donnée de cette simulation va donc provoquer un phénomène de diffusion thermique dans la barre, en l'occurrence un réchauffement uniaxial, aussi bien visible sur les isovaleurs de la température obtenue avec une méthode Mixte (figure 3.31) que sur celles de la composante q_z du flux de chaleur (figure 3.32).

De plus, sur les isovaleurs de q_z , on constate que le flux est parfaitement imposé, aussi bien en début qu'en fin de simulation.

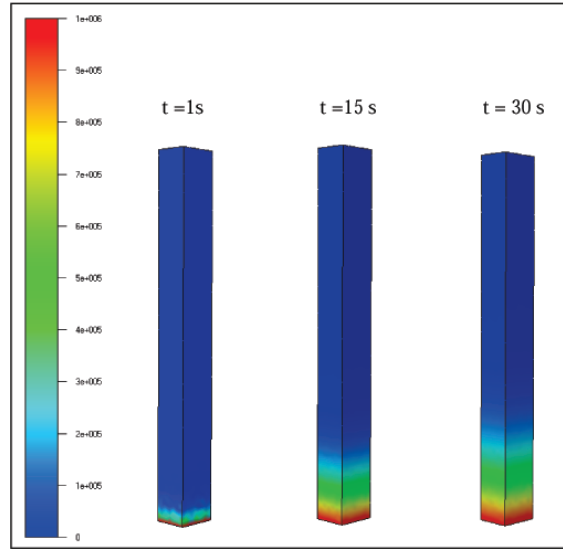


FIG. 3.32 – Isovaleurs de la composante suivant z du flux de chaleur lors de la résolution Mixte continue : mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.

Plus précisément, évaluons la fiabilité et la précision de la formulation Mixte à l'aide des solutions analytiques et des divers capteurs positionnés respectivement à 0, 1, 10, 20 et 50mm du bord. Tous les tracés analytiques et numériques sont représentés sur la figure 3.33, montrant ainsi la fiabilité du modèle Mixte continu, avec des courbes numériques très proches des solutions exactes. Avec un maillage moyennement fin ($h = 2,3mm$), ces résultats sont déjà satisfaisants avec une moyenne d'erreur de l'ordre de 3,7% ($z = 1mm$) et de 4% ($z = 10mm$).

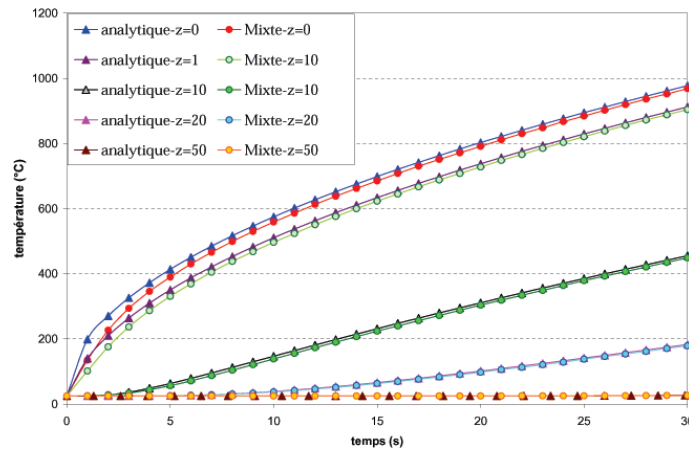


FIG. 3.33 – Evolution de la température : comparaison entre la formulation Mixte continue et la solution analytique.

Si l'on s'intéresse à présent à l'évolution au cours du temps de la composante q_z du flux de chaleur, visible sur la figure 3.34, on se rend compte de la pertinence du modèle pour l'estimation de q_z . En effet, une allure correcte des courbes numériques est obtenue pour tous les capteurs, aussi bien ceux placés en peau que ceux plus éloignés de la face régulée thermiquement.

Si l'on considère les résultats numériques précédemment obtenus avec l'approche Galerkin standard, le schéma TGD et le modèle Gdimp (implantés dans Forge3[®]), on s'aperçoit que la formulation Mixte et le GS sont les plus précis, en obtenant des champs de température très voisins pour tous les capteurs (figures 3.35 et 3.36).

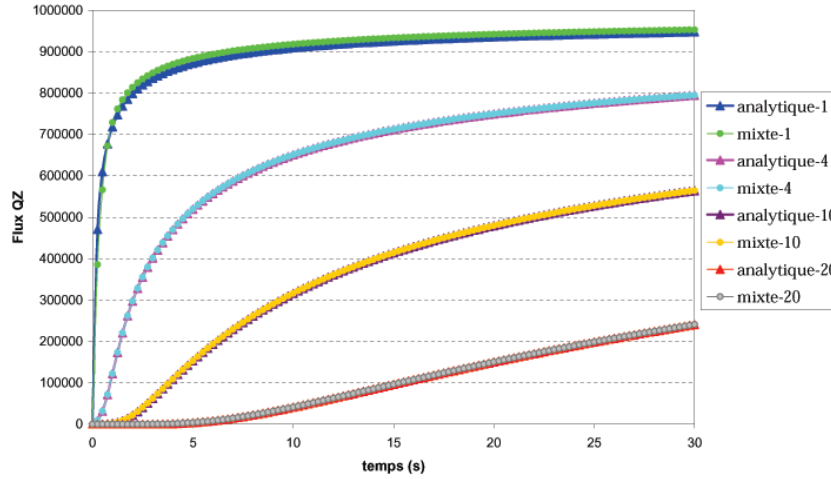


FIG. 3.34 – Evolution du flux q_z : comparaison entre la solution analytique et la formulation Mixte de Forge3[®].

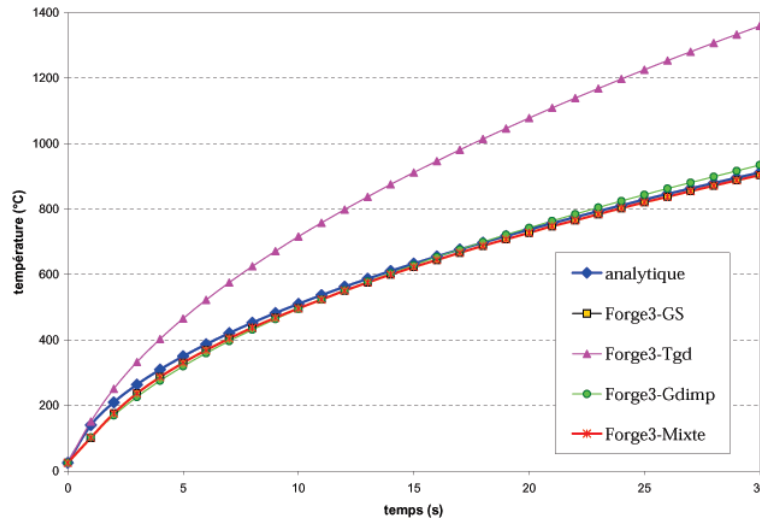


FIG. 3.35 – Comparaison entre l'analytique, le GS, le TGD, le Gdimp et la formulation Mixte pour $z = 1\text{mm}$ et $h = 2,3\text{mm}$.

Le tableau 3.10 compare les temps de calcul et les pourcentages de l'erreur des quatre modèles, mettant ainsi en évidence la robustesse de la formulation Mixte continue. Il s'ensuit les remarques suivantes :

- Calculant simultanément le champ de température et le flux, il est normal que le modèle Mixte soit légèrement moins rapide que l'approche GS mais tout aussi précis.
- Le Gdimp, moins fiable, est toutefois plus rapide que la formulation Mixte.
- Le TGD reste toujours inapproprié pour le test de flux imposé.

⇒ Sur le cas standard de flux imposé, la formulation mixte se révèle aussi robuste que l'approche Galerkin standard, avec une excellente précision (même sur maillage assez grossier) et avec un temps de résolution acceptable.

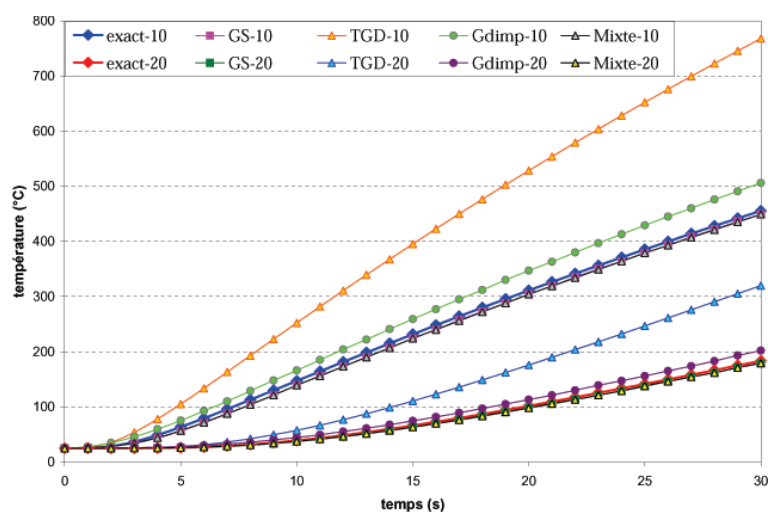


FIG. 3.36 – Comparaison entre l'analytique, le GS, le TGD, le Gdimp et la formulation Mixte pour $z = 10mm$ et $z = 20mm$.

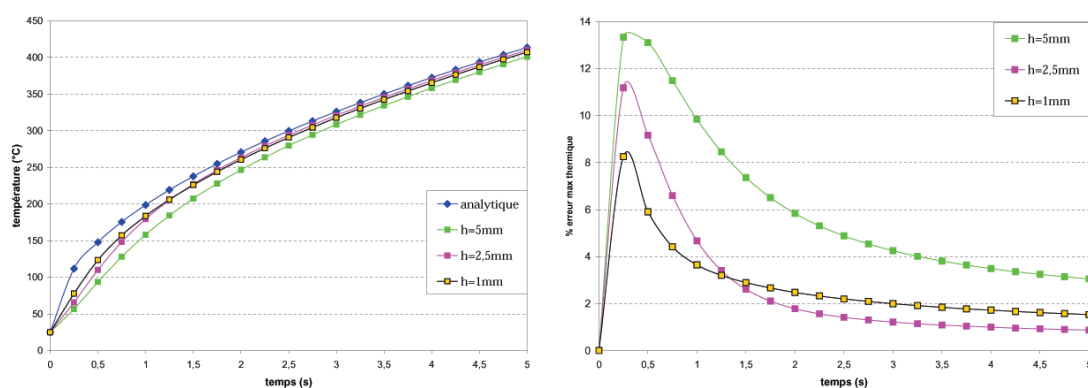
$[0,30s]$	GS	TGD	Gdimp	Mixte
CPU	80s	8min	97s	3min35s
erreur $z = 1mm$	3,77%	40%	4,4%	3,74%
erreur $z = 10mm$	4,12%	60%	13,4%	4%
erreur $z = 20mm$	3,17%	53%	10,3%	2,77%

TAB. 3.10 – Comparaison des temps de calculs pour les trois modèles.

3.6.2.2 Sensibilité du modèle Mixte continu P_1/P_1

Comme pour le test de température imposée, on se propose de regarder l'influence du maillage et du pas de temps sur la solution numérique Mixte.

a) Raffinement du pas d'espace



(a) Evolution de la température "Mixte"

(b) Evolution de l'erreur maximale (2.25)

FIG. 3.37 – Raffinement du maillage pour le capteur situé en peau avec $dt = 0,25s$.

Par exemple, reprenons le cas standard en considérant cette fois une durée de simulation de 5s, avec $dt = 0,25s$ et trois tailles de maille (5; 2,5 et 1mm). Sur la figure 3.37, nous avons représenté respectivement les tracés de la température (a) et de l'erreur maximale (b) pour le noeud situé à 1mm du bord imposé.

⇒ Comme pour le test de la température imposée, la formulation Mixte continue est sensible au raffinement du maillage, avec une estimation du champ de température (et aussi du flux) plus pertinente à l'aide d'un maillage très fin, au prix d'un temps de calcul plus important (cf tableau 3.11).

[0,5s]	$h = 5mm$	$h = 2,5mm$	$h = 1mm$
CPU	20s	110s	8min
erreur max $z = 1mm$	6,13%	2,78%	2,75%

TAB. 3.11 – Raffinement du maillage : temps de calculs et erreurs maximales.

b) Raffinement du pas de temps

Ici, on fait varier le pas de temps dt en conservant une taille de maille constante ($h = 1mm$). Si l'on s'intéresse, par exemple, aux noeuds en peau, on constate un rapprochement des courbes numériques Mixtes de la température (figure 3.38(a)) et du flux q_z (figure 3.38(b)) dès que le pas de temps est suffisamment petit. Forcément, avec ces valeurs de dt , le temps de résolution est plus important mais l'erreur maximale est plus faible.

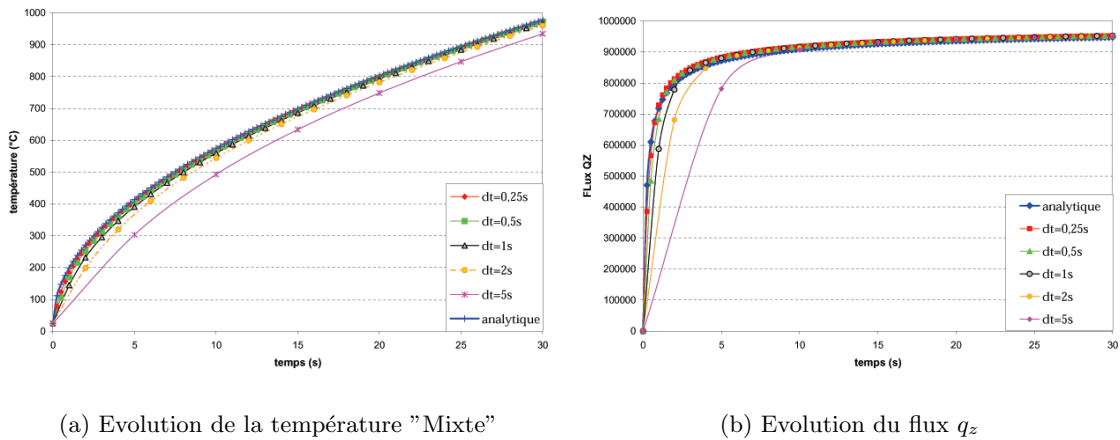


FIG. 3.38 – Raffinement du pas de temps pour le capteur situé en peau avec $dt = 0,25s$.

c) Analyse de sensibilité par rapport à la valeur de Φ_{imp}

La dernière étude de sensibilité concerne la variation de la valeur du flux imposé. On a déjà établi que plus la valeur du flux est grande, plus le choc thermique sera important avec une diffusion thermique plus violente et rapide dans la barre.

Ce phénomène est heureusement obtenu avec la formulation Mixte, aussi bien pour la température (figure 3.39) que pour la composante q_z (figure 3.40) avec une allure générale de courbes très proche de l'analytique.

Le réchauffement étant plus prononcé avec les plus grandes valeurs de Φ_{imp} , il semble donc normal que l'estimation du champ de température (et celle du flux) soient légèrement moins

précises (cf tableau 3.12). Cette constatation est mise en évidence sur les figures 3.41 représentant l'erreur moyenne (estimée ici en erreur maximale) de la température et du flux.

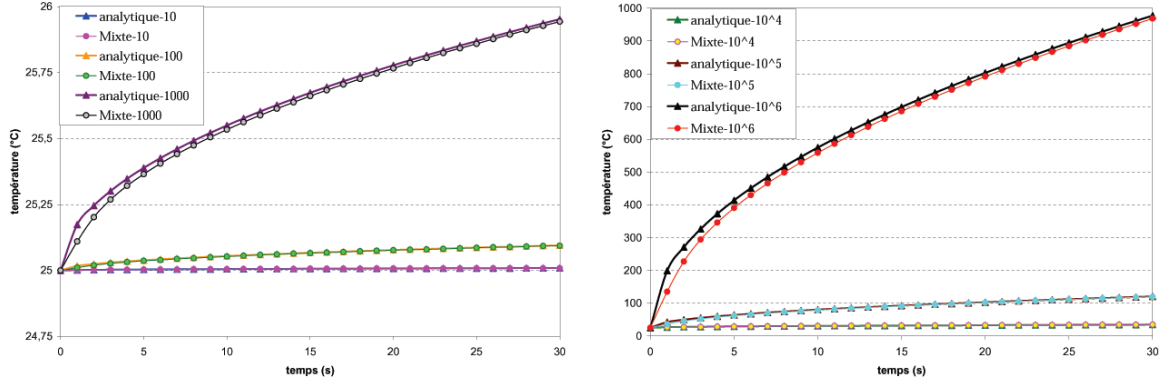


FIG. 3.39 – Evolution de la température obtenue par la résolution Mixte en fonction de Φ_{imp} : noeud situé sur la face imposée ($z = 1mm$) avec $h = 2mm$.

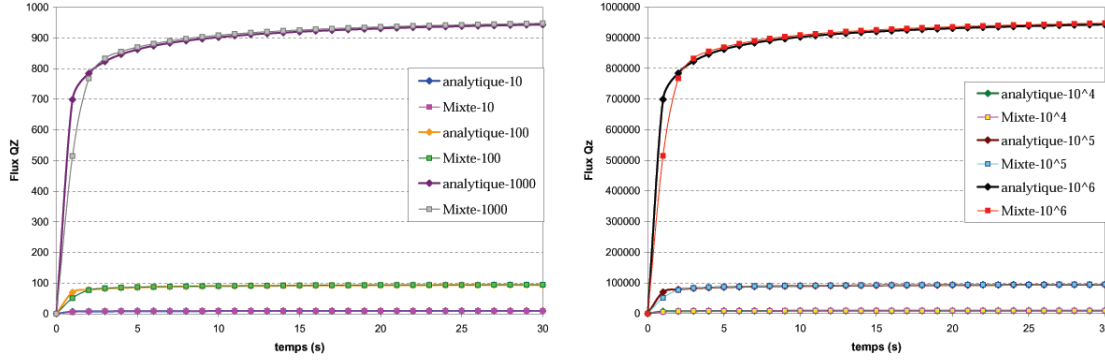


FIG. 3.40 – Evolution du flux q_z pour le noeud situé à $z = 1mm$ en fonction de Φ_{imp} .

$[0,30s]$	10	100	1 000	10^4	10^5	10^6
erreur max T	0,001%	0,007%	0,06%	0,5%	1,4%	1,4%
erreur max q_z	1,16%	1,3%	1,27%	1,27%	1,27%	1,27%

TAB. 3.12 – Variation de Φ_{imp} : estimation des erreurs maximales.

3.6.2.3 Conclusion

La validation du modèle Mixte sur le cas-test en flux imposé est concluante : il semble mieux adapté pour résoudre ce type de problème de diffusion que les schémas TGD et Gdimp. Avec sa formulation Mixte originale qui permet de calculer à tout instant le champ de température et le flux de chaleur, ce modèle se révèle le plus performant pour ce deuxième cas analytique, avec une excellente précision (du même ordre que celle de l'approche GS de Forge3[®]) et un temps de calculs acceptable (plus long que le GS à cause des quatre inconnues par noeud).

On retrouve un modèle sensible au maillage, au pas de temps et à la valeur du flux imposé, qui aura tendance à provoquer une diffusion thermique plus importante et plus rapide, avec donc une estimation un peu moins précise des deux champs inconnus.

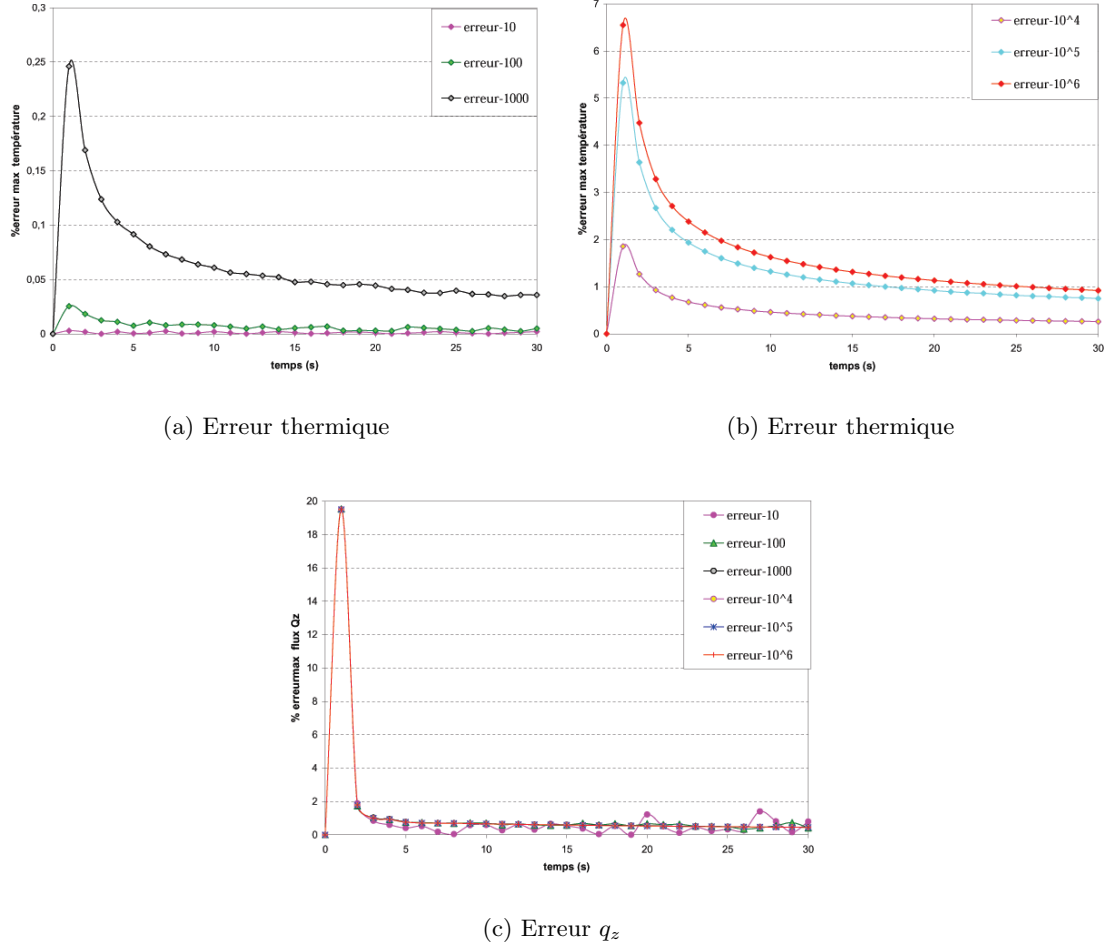


FIG. 3.41 – Evolution de l'erreur maximale pour la formulation Mixte.

3.6.3 Conduction imposée sur l'extrémité d'une barre d'acier

Nous terminons la validation de la formulation Mixte continue en introduisant un dernier cas test monodimensionnel qui va consister à imposer un coefficient de transfert thermique constant sur l'extrémité de la barre en contact avec un autre milieu (ici un outil). Autrement dit, un phénomène de conduction imposée est considéré, au cours duquel des échanges thermiques se produisent entre la barre et l'outil.

Une barre d'acier de dimension $10 \times 10 \times 100 \text{ mm}$ est initialement à la température $T_0 = 25^\circ\text{C}$. A l'instant $t = 0$, cette barre est mise en contact avec un outil de 50°C sur l'une de ses parois (figure 3.42). La température de cet outil est maintenue par la suite, tout comme son coefficient de transfert thermique $h_c = 20\,000 \text{ W/m}^2\text{K}$: la barre d'acier est donc maintenue au flux de conduction imposée: $\Phi_{\text{cond}} = \vec{\Phi} \cdot \vec{n} = h_c (T - T_{\text{out}})$ sur l'une de ses faces. De plus, on suppose un régime adiabatique sur l'ensemble des autres faces de la pièce. Dans ces conditions, la barre qui est donc en contact avec cet outil, va se réchauffer.

Les données du matériau restent inchangées. Ce sont toujours celles d'un acier moyennement conducteur de chaleur :

$$k = 15 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}, \rho = 7800 \text{ Kg.m}^{-3}, c = 360 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Pour étudier le réchauffement de la barre, trois traceurs sont positionnés afin de suivre correctement l'évolution de la température au cours du temps : le premier est placé en peau (à 1mm de la zone de contact), le second à 10mm et le dernier à 20mm ; tous deux situés au centre de la barre (cf figure 3.42).

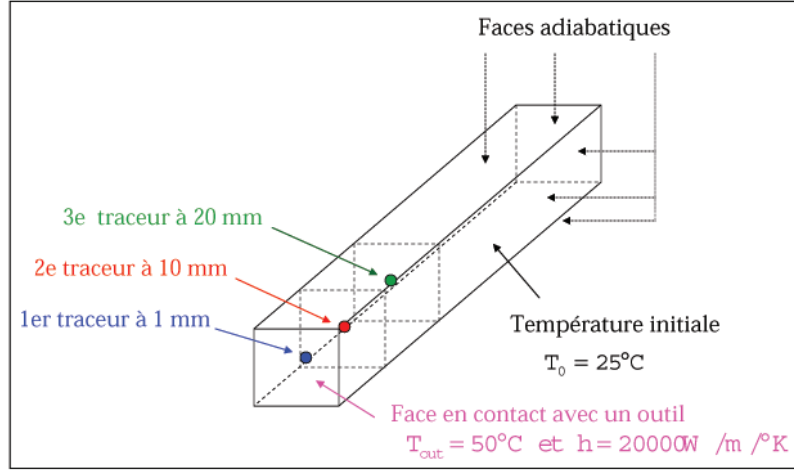


FIG. 3.42 – Barre d'acier à 25°C maintenue à Φ_{cond} sur l'une de ces faces.

3.6.3.1 Solution analytique

Ce test monodimensionnel de conduction imposée possède également une solution analytique [Incropera-DeWitt 2001], qui nous sera très utile pour la validation de nos trois modèles numériques (discontinus et continu). Cette solution s'écrit :

$$T(z,t) = T_0 + (T_{\text{out}} - T_0) \left[\text{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - \exp \left(\frac{h_c z}{k} + \frac{h_c^2 \alpha t}{k^2} \right) * \text{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h_c \sqrt{\alpha t}}{k} \right) \right] \quad (3.61)$$

Dans (3.61), z représente une profondeur donnée dans la direction uniaxiale de la barre et $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ la diffusivité thermique du matériau.

La solution analytique correspondant à ces trois traceurs est représentée sur la figure 3.43.

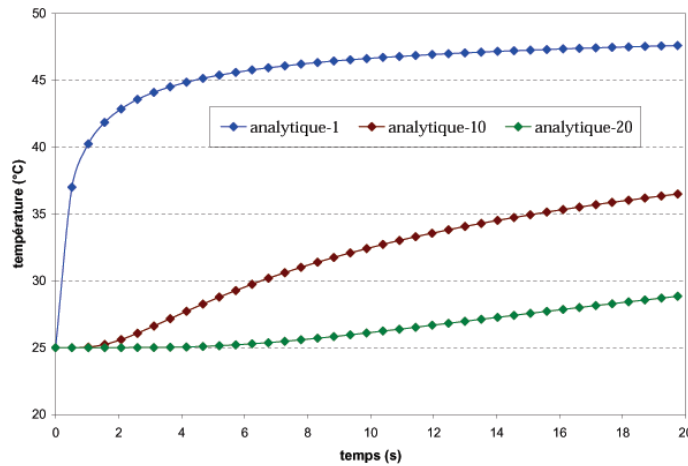


FIG. 3.43 – Représentation de la solution analytique pour les capteurs situés à 1mm , 10mm et 20mm du bord en conduction imposée.

3.6.3.2 Visualisation des résultats

Nous nous proposons maintenant de montrer et de commenter quelques uns des résultats numériques, obtenus avec les trois modèles : TGD, Gdimp et la formulation Mixte. Dans le but d'établir une comparaison plus complète et fiable, nous aurons également à notre disposition, pour ce test, la solution analytique (3.61) et l'approche GS de Forge 3[®].

Au cours de la résolution avec une formulation Mixte, la diffusion thermique est mise en évidence à la fois sur les isovaleurs de la température (figure 3.44) que sur celles du flux q_z (figure 3.45); isovaleurs prises à des instants précis au cours de la simulation (durée total 20s).

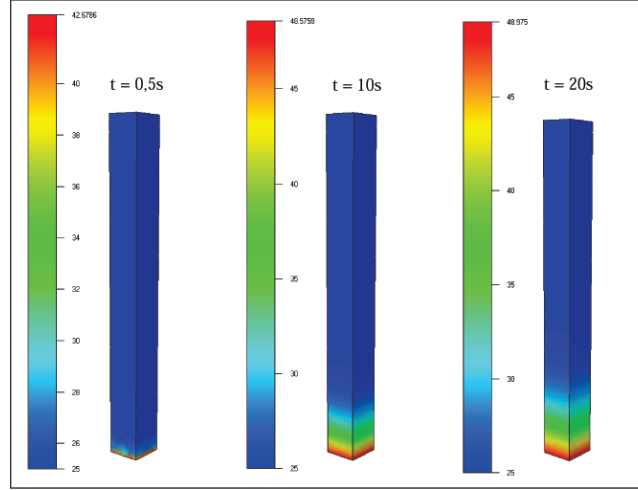


FIG. 3.44 – Isovaleurs de la température au cours de la résolution Mixte.

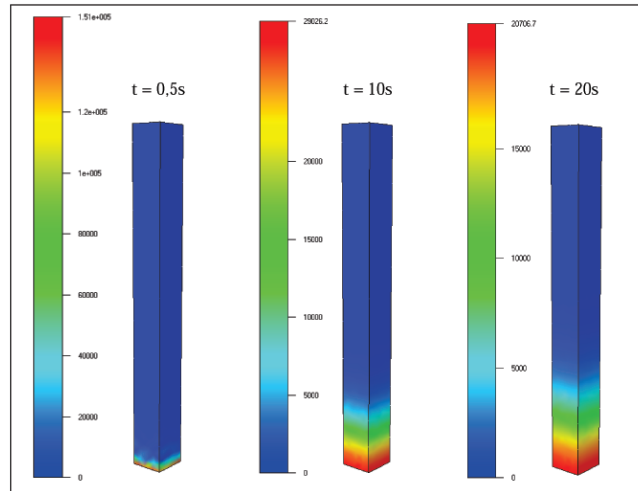


FIG. 3.45 – Isovaleurs de la composante suivant z du flux de chaleur lors de la résolution Mixte continue : mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.

Nous prenons une taille de maille constante moyenne, $h = 2,8mm$ et un pas de temps de 0,5s. Comme on peut le voir sur la figure 3.46, une tendance générale correcte des trois modèles numériques par rapport à l'analytique et l'approche GS est obtenue par les trois capteurs. Si l'on regarde plus attentivement ces tracés, on se rend compte que le TGD est le plus éloigné (de la solution analytique) alors que la formulation Mixte est la plus rapprochée.

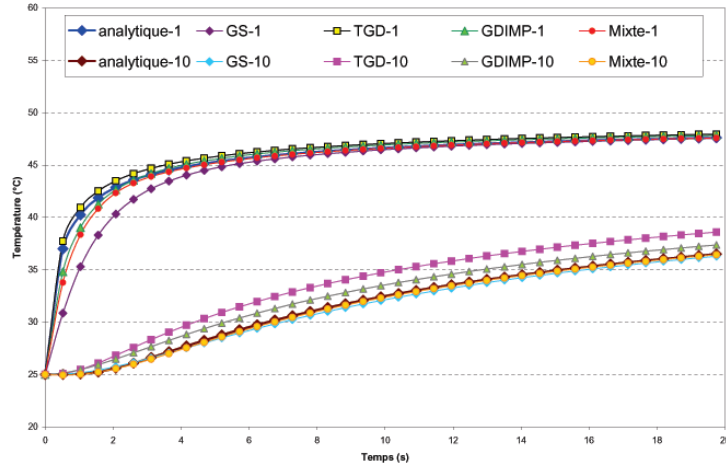


FIG. 3.46 – Evolution de la température : comparaison des divers modèles numériques implantés dans Forge3[®] avec $h = 2,8\text{mm}$.

Comparer les temps de résolution et les erreurs moyennes des quatres modèles du tableau 3.13 nous indique que la formulation Mixte est la plus fiable, avec des erreurs très faibles et un temps de calculs tout à fait raisonnable.

[0,20s]	GS	TGD	Gdimp	Mixte
CPU	66s	180s	70s	100s
erreur $z = 1\text{mm}$	1,7%	1%	0,75%	0,5%
erreur $z = 10\text{mm}$	0,8%	6,2%	3,1%	0,3%

TAB. 3.13 – Test de conduction imposée : comparaison des temps calculs et des erreurs.

Remarque 3.5 Solution analytique de la composante q_z du flux de chaleur.

Grâce à la solution analytique donnant la température (3.61) et à la loi de Fourier, on peut calculer la solution analytique de q_z . Cette dernière s'écrit :

$$q_z(z,t) = -k \frac{\partial T}{\partial z}(z,t) = -k (T_{out} - T_0) \left[-\frac{\exp(\frac{-z^2}{4\alpha t})}{\sqrt{\pi \alpha t}} - \frac{h \exp(\frac{h_c z}{k} + \frac{h_c^2 \alpha t}{k^2}) * \operatorname{erfc}(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h_c \sqrt{\alpha t}}{k})}{k} + \frac{\exp(\frac{h_c z}{k} + \frac{h_c^2 \alpha t}{k^2}) * \exp(-(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h_c \sqrt{\alpha t}}{k})^2)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \right] \quad (3.62)$$

La formulation Mixte permet également de suivre et de visualiser les évolutions du flux q_z au cours du temps. Ainsi, nous les avons représentées sur la figure 3.47 pour un noeud directement en contact avec le flux Φ_{conv} (c'est à dire $z = 0\text{mm}$) et un autre placé à $z = 10\text{mm}$. En comparant avec la solution analytique, on observe un léger décalage, en début de simulation, pour le capteur directement en contact. Comme pour le test de température imposée, ce décalage provient de l'initialisation de flux et s'estompe au bout de quelques incréments. Malgré ce décalage, il y a une bonne concordance des résultats.

⇒ Avec un maillage moyennement grossier, le modèle Mixte continu semble encore mieux adapté que l'approche GS pour le test de conduction imposée, en donnant une estimation plus précise du champ de température (avec un coût de calcul un peu plus important).

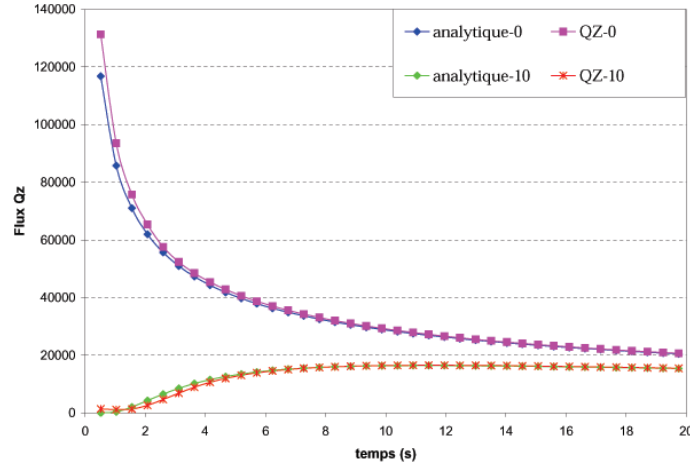


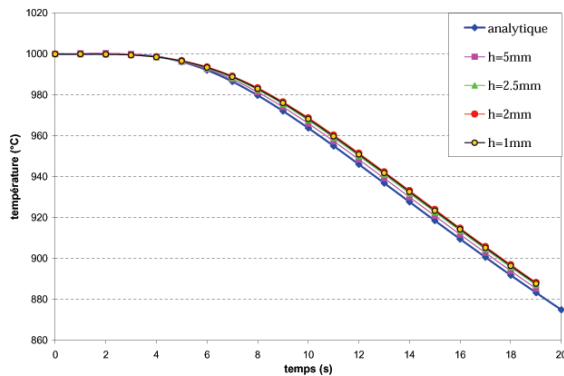
FIG. 3.47 – Evolution de flux q_z : comparaison entre l'analytique et la formulation Mixte continue.

3.6.3.3 Sensibilité de la formulation Mixte au maillage et au pas de temps

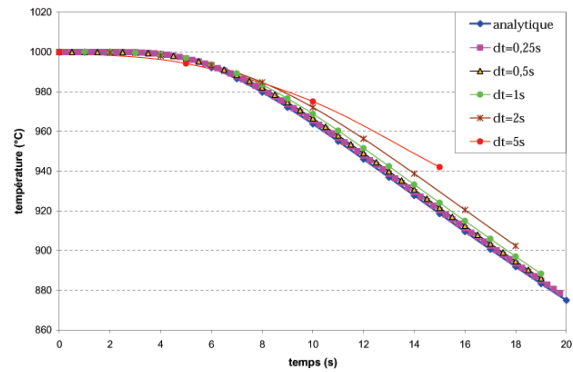
Comme précédemment, on peut étudier l'influence du maillage et du pas de temps sur la solution numérique Mixte (ou sur les solutions numériques TGD et Gdimp). Quel que soit le modèle de résolution choisi, le même comportement en découle : *une solution numérique plus précise (avec une erreur plus petite) avec un maillage plus fin ou un pas de temps plus petit et ceci au détriment d'un temps de calculs beaucoup plus élevé.*

Pour illustrer ces propos, nous représentons seulement l'évolution de la température Mixte pour le noeud situé à $z = 10\text{mm}$. Un réchauffement dans la barre va se produire avec cette mise en données : $T_0 = 1000^\circ\text{C}$, $T_{out} = 200^\circ\text{C}$ et $h_c = 20\,000$.

- La figure 3.48(a) s'intéresse au raffinement de maillage avec un pas de temps fixé à 1s . Une estimation de la température déjà très pertinente est obtenue avec le maillage le plus grossier ($\simeq 0,8\%$).
- La figure 3.48(b) met en évidence la sensibilité de la solution numérique Mixte au raffinement du pas de temps, obtenue avec un maillage fin ($h = 1\text{mm}$) et une solution exacte tracée pour $dt = 0,25\text{s}$.



(a) Influence du maillage h



(b) Influence du pas de temps dt

FIG. 3.48 – Evolution de la température "Mixte" pour le capteur situé à $z = 10\text{mm}$.

3.6.3.4 Sensibilité de la formulation mixte au coefficient de transfert thermique h_c

Dans ce paragraphe, nous mettons en évidence l'influence du coefficient de transfert thermique sur la solution numérique. A cet effet, nous considérons le test suivant : la barre initialement à 1200°C est mise en contact avec un outil qui est à $T_{out} = 50^\circ\text{C}$. La barre est maillée avec une taille de maille fine ($h = 1\text{mm}$) et le pas de temps choisi est d'une seconde. Ainsi, la barre au contact de cet outil va se réchauffer. Bien évidemment, ce réchauffement sera plus ou moins prononcé suivant la valeur du coefficient d'échange thermique h_c .

Comme en témoignent les divers tracés de la figure 3.49, plus ce coefficient h_c est élevé, plus le réchauffement est sévère et brutal. Autrement dit, pour un noeud situé à 10mm du bord imposé, le réchauffement ressenti sera moins violent que pour un noeud directement en contact avec l'outil. Par conséquent, les noeuds de la face en contact prendront rapidement la température de l'outil pour les plus grandes valeurs de h_c (figure 3.49(b)) alors que le noeud à 10mm aura tendance à réchauffer plus lentement avec un h_c très petit (figure 3.49(a)).

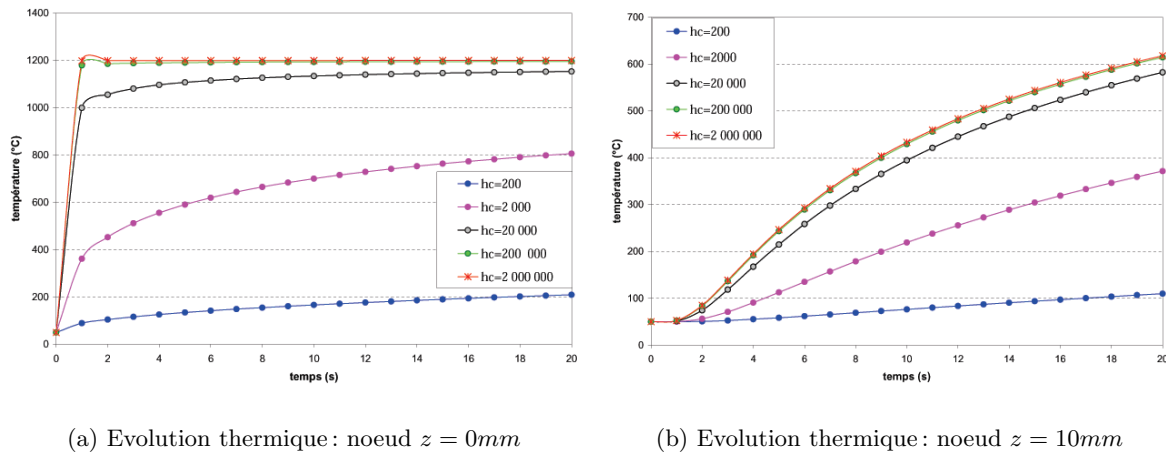


FIG. 3.49 – Influence du coefficient de transfert thermique h_c sur la solution numérique Mixte.

Sur la figure 3.49(b), on peut également remarquer qu'à partir de la valeur $h_c = 10^5$, un réchauffement maximum est atteint. D'autre part, le phénomène de conduction est très bien pris en compte sur la face en conduction imposée avec la formulation Mixte. Chose étonnante, on se rend compte que pour cette face, l'estimation de la température "Mixte" devient de plus en plus précise avec un coefficient de transfert de plus en plus important, en passant de 3,2% à 0,01% (cf tableau 3.14), alors que le phénomène inverse se produit avec le capteur positionné à 10mm .

[0,20s]	$h_c = 200$	2 000	$2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^6$
Erreur $z = 0\text{mm}$	3,2%	3%	1%	0,1%	0,01%
Erreur $z = 10\text{mm}$	2%	4,8%	5,7%	5,8%	5,8%

TAB. 3.14 – Influence du coefficient de transfert thermique h_c sur l'erreur Mixte.

3.6.3.5 Conclusion

La méthode Mixte a été validée sur le test de conduction imposée, en donnant une estimation précise de la température, avec un temps de résolution acceptable. Les schémas TGD et Gdimp semblent moins bien appropriés, avec des résultats moins pertinents. Cependant, aucun des modèles n'a fait apparaître de phénomènes non physiques.

De plus, la méthode Mixte semble aussi précise que l'approche GS; seul le coût des calculs diffère.

3.6.3.6 Remarques

A partir du cas-test en conduction imposée, validé avec la formulation Mixte, nous pouvons faire plusieurs commentaires.

a) Comparaison de cas "extrêmes" en température et conduction imposée

Lorsque le coefficient de transfert thermique est très élevé ($h_c \simeq 10^6 W/m/K$ ou encore dans l'absolu quand $h_c \rightarrow \infty$), la condition de conduction imposée tend vers la condition de température imposée.

Dans cette partie, on se propose donc de regarder si on arrive effectivement à cette conclusion. Pour cela, on choisit une taille de maille de $2mm$, une température initiale T_0 de $1000^\circ C$ et :

- une température imposée $T_{imp} = 25^\circ C$,
- une température extérieure $T_{ext} = 25^\circ C$ et un coefficient de transfert thermique $h_c = 2.10^6 W/m/K$.

Pour étudier ce refroidissement, nous considérons trois capteurs, situés à 1, 10 et 20mm du bord régulé thermiquement. Sur la figure 3.50, nous représentons, pour ces trois capteurs, la solution analytique (en température imposée), la solution numérique découlant d'une résolution Mixte en température et celle en conduction imposée qui se superposent.

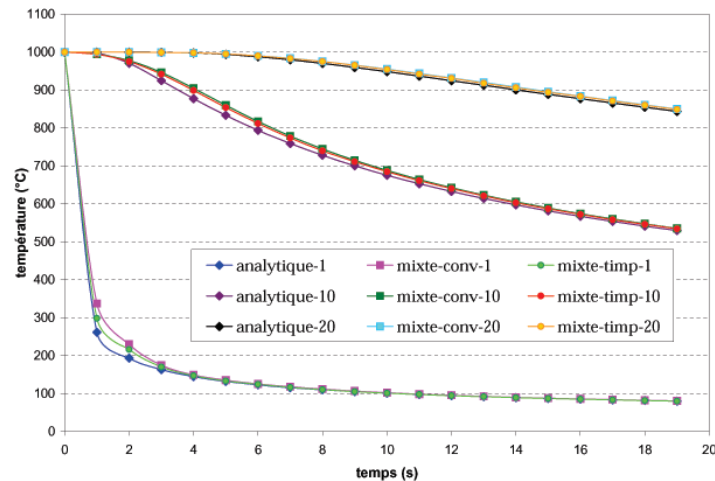


FIG. 3.50 – Evolution de la température "Mixte" : comparaison entre le test en température imposée et celui en conduction imposée.

En comparant les résultats numériques, il est intéressant de noter que les erreurs provenant de la conduction imposée sont plus importantes que celles en température imposée; ce qui

est normal. Pour qu'elles soient identiques, il aurait fallu supposer une valeur plus grande du coefficient de transfert conductif h_c .

[0,20s]	$z = 1mm$	$z = 10mm$	$z = 20mm$
Erreur convimp	4%	1,8%	0,5%
Erreur timp	2,5%	1,4%	0,4%

TAB. 3.15 – Comparaison des erreurs provenant d'une résolution Mixte.

b) Prise en compte de la convection/rayonnement

Jusqu'à présent, nous avons validé la formulation mixte et les deux modèles discontinus P_0 uniquement sur des cas-test où la diffusion thermique était uniaxiale et provenait de la prise en compte des conditions aux limites type Dirichlet (température ou flux imposé(e)) ou Fourier (conduction imposée).

Nous nous proposons de rajouter des échanges thermiques entre la pièce et l'air. En effet, le phénomène de convection/rayonnement est la dernière condition aux limites qui n'a pas encore été abordée et qui, de plus est, se révèle présente au cours du processus du forgeage d'une pièce métallique.

Il est donc intéressant de regarder comment se comportent les divers modèles si l'on prend en compte ce type d'échange thermique entre la barre d'acier et l'air (sous la forme d'une écriture simplifiée). Malheureusement, dans ce cas, nous n'aurons plus de solution analytique pour nous servir de référence. C'est pourquoi, nous choisissons de prendre comme solution de référence la solution numérique GS, et pour l'ensemble des cas qui n'auront plus de solutions exactes.

Pour étudier la convection/rayonnement, nous reprenons la barre d'acier (avec $h = 2mm$) qui a toujours les mêmes caractéristiques. Sa température est de $25^\circ C$. La température ambiante est de $T_{ext} = 50^\circ C$, avec un coefficient d'échange thermique h_{ext} variable (figure 3.51).

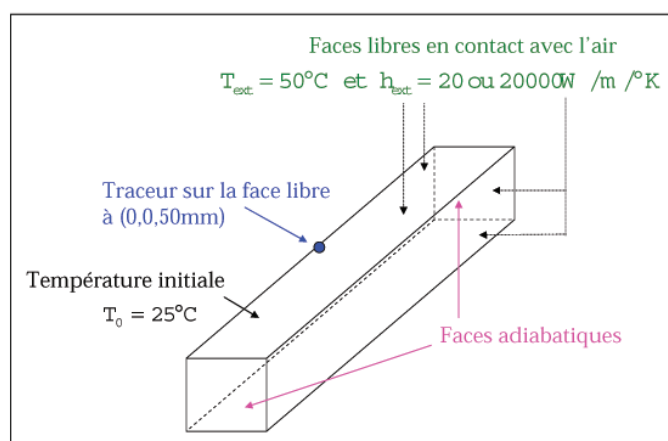


FIG. 3.51 – Barre d'acier à $25^\circ C$ en contact avec l'air sur l'ensemble de ses faces.

Prenons deux valeurs de ce coefficient h_{ext} : $20 W/m/K$ et $2000 W/m/K$. Au contact de l'air, la barre va donc se réchauffer et ce réchauffement sera accentué avec la plus grande valeur du coefficient de transfert thermique h_{ext} . Pour visualiser ce réchauffement, nous plaçons un capteur directement sur une face libre, en contact avec l'air, avec pour coordonnées (0,0,50).

La figure 3.52 représente l'évolution de la température pour les diverses solutions numériques Forge3[®], obtenue pour ce capteur et pour les deux valeurs du coefficient h_{ext} . En comparant à la solution numérique GS de référence, on se rend compte que le phénomène de convection/rayonnement est parfaitement pris en compte avec les trois modèles.

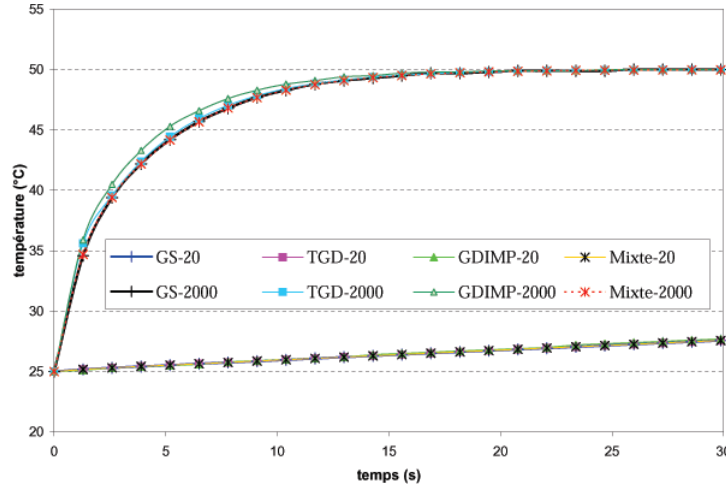


FIG. 3.52 – Comparaison des divers modèles numériques sur le test de rayonnement.

⇒ Le dernier mode de transfert thermique en convection/rayonnement est bien pris en compte par les trois modèles numériques (TGD, Gdimp et formulation Mixte); ce résultat valide ces trois formulations, en ayant pour seule solution de référence la solution numérique Galerkin standard asynchrone de Forge3[®].

b) Prise en compte de la conduction et de la convection/rayonnement

Les phénomènes de conduction et de convection/rayonnement étant correctement gérés et de façon indépendante par la formulation Mixte et les modèles discontinus, on se propose dans ce dernier paragraphe de les combiner. Pour ce faire, nous présentons un cas de réchauffement puis de refroidissement de la barre d'acier, avec la solution numérique GS asynchrone de Forge3[®] comme base de comparaison.

• Premier cas : réchauffement

Les conditions de la simulation sont les suivantes :

- Une température initiale de la pièce à $25^{\circ}C$
- Un outil à la température de $100^{\circ}C$ est en contact avec la face inférieure de la barre. Le coefficient de transfert de conduction est de $2000 W/m/K$.
- Le reste de la pièce rayonne ($T_{ext} = 50^{\circ}C$ et $h_{ext} = 50 W/m/K$).
- La taille de maille choisie est de $2,8mm$.
- Un capteur est positionné à $10mm$ du bord en contact avec l'outil.

Comme on peut le voir sur les différentes évolutions thermiques de la figure 3.53, un réchauffement dans la pièce est obtenu. L'allure générale des courbes semble correcte. On remarque que le TGD reste le plus éloigné de la solution GS, que le Gdimp donne une solution numérique encourageante et que la formulation Mixte coïncide parfaitement.

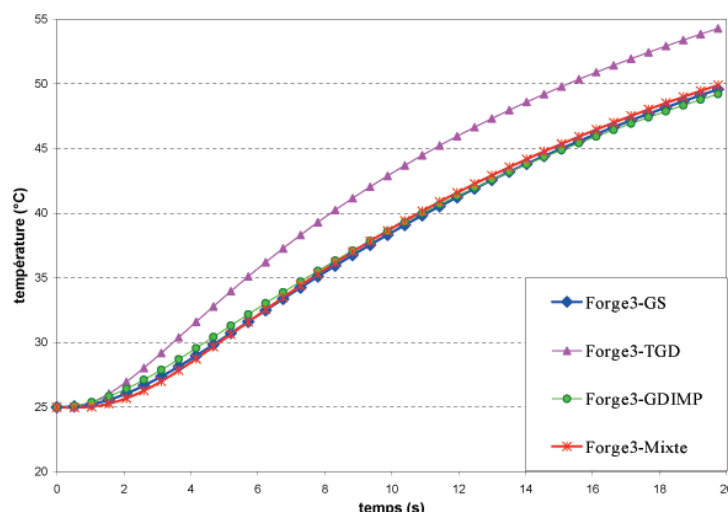


FIG. 3.53 – Comparaison des divers modèles numériques sur le test de réchauffement.

• Deuxième cas : refroidissement de la barre

Ici, nous supposons :

- Une température initiale de la pièce à 800°C
- Un outil à la température de 25°C est en contact avec la face inférieure de la barre. Le coefficient de transfert de conduction est de $20\,000\text{ W/m/K}$.
- Le reste de la pièce rayonne ($T_{\text{ext}} = 50^{\circ}\text{C}$ et $h_{\text{ext}} = 50\text{ W/m/K}$).
- La taille de maille choisie est de $2,8\text{ mm}$.
- Un capteur est positionné à 10 mm du bord en contact avec l'outil.

Cette mise en données entraîne un refroidissement dans la pièce, visible sur les divers tracés numériques de la figure 3.54. Le même comportement que pour un test de refroidissement est obtenu : les trois solutions numériques (Gdimp et Mixte) ont une allure générale très proche de la solution de référence, le TGD reste le plus éloigné et la formulation Mixte est la plus fiable.

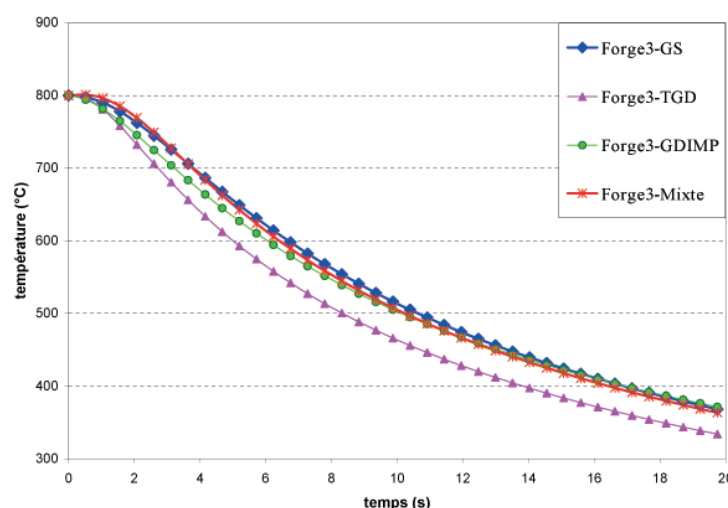


FIG. 3.54 – Comparaison des divers modèles numériques sur le test de refroidissement.

⇒ Le modèle Mixte semble efficace pour résoudre simultanément les problèmes de conduction et de convection/rayonnement. Notre schéma Gdimp est légèrement moins pertinent que la formulation Mixte en donnant une estimation de la température satisfaisante et toujours avec

un gain de temps non négligeable. Par comparaison, le TGD est le moins précis, tout en restant acceptable.

3.7 Bilan général

Dans ce troisième chapitre, nous nous sommes intéressés à la résolution numérique du problème thermique instationnaire en introduisant un modèle original, la formulation mixte continue P_1/P_1 . Après avoir longuement détaillé notre nouveau modèle (discrétisation spatio-temporelle, choix du schéma temporel, traitement subtil des conditions aux limites, résolution du système linéaire,...), nous avons effectué plusieurs validations numériques sur des cas purement thermiques munis d'une solution analytique afin d'en évaluer sa robustesse.

Pour faciliter la synthèse de notre modèle, nous dressons tous ses avantages et ses limitations, avant de les regrouper dans un tableau 3.16.

a) Avantages

↪ Sa formulation mixte originale permet, à tout instant du processus thermique, de déterminer indépendamment le champ de température et le flux de chaleur.

↪ Il y a possibilité de lui affecter divers schémas d'intégration temporelle dont le plus performant est le schéma de Dupont implicite. On peut noter que le schéma Mixte implicite (à deux pas de temps) est aussi intéressant, avec un temps de résolution non négligeable malgré l'apparition fréquente d'oscillations non physiques.

↪ Le modèle est stable, robuste, extrêmement précis (de même ordre de précision que l'approche GS combinée à la thermique asynchrone pour le test de flux imposé et de convection imposée).

↪ Par comparaison aux solutions analytiques, aux schémas discontinus (TGD et Gdimp) et quand cela est possible à l'approche GS asynchrone, la formulation Mixte est la plus adaptée pour résoudre les problèmes de diffusion pure.

↪ Le mode de structuration du maillage n'influe pas sur les solutions numériques (en température et en flux).

↪ Le fait d'augmenter le degré de l'interpolation en passant à des polynômes (continus) de degré 1, permet de s'affranchir des principales limitations de l'approche GS (sans thermique asynchrone) et du TGD, et de conserver tous les avantages d'une formulation mixte.

b) Inconvénients

↪ Utiliser une interpolation mixte P_1/P_1 conduit à une meilleure précision qu'avec du P_0/P_0 . En contre-partie, le temps de calcul est plus important avec à présent, la résolution d'un système linéaire à quatre inconnues par noeud.

↪ D'autre part, notre modèle reste sensible au raffinement de maillage et au pas de temps. Cette sensibilité a des conséquences non négligeables lorsqu'on s'intéresse à la simulation de choc thermique extrême avec un pas de temps très petit (inférieur à 0,01s) : des fluctuations spatio-temporelles peuvent survenir. Il faut donc faire très attention au jeu de paramètres utilisé

(maillage h , pas de temps dt et conditions initiales et aux limites) de manière à ce qu'il reste raisonnable et cohérent vis à vis de la condition de profondeur de pénétration.

Dans ce cas précis, le TGD et le Gdimp sont plus stables et plus robustes en ne présentant aucune fluctuation. On pourrait donc envisager de coupler les modèles Gdimp(ou TGD)/formulation Mixte sur les premiers incréments de la simulation pour estomper les oscillations, là où le choc ressenti est violent. Il ne resterait plus qu'à déterminer un critère pour le couplage de ces modèles.

Formulation Mixte continue P_1/P_1
<ul style="list-style-type: none"> • Interpolation P_1/P_1 : T et \vec{q} linéaires par élément. • Plusieurs schémas d'intégration temporelle : le schéma Dupont implicite retenu \leadsto schéma stable, consistant. • Système linéaire à résoudre avec 4 inconnues par noeud. • Formulation extrêmement précise, robuste, la plus adaptée pour résoudre les problèmes purement diffusifs. • Mais suffisamment sensible au maillage et au pas de temps dt. • Validation sur les trois cas tests purement thermiques : <ul style="list-style-type: none"> * Température imposée : absorption du choc thermique. Equilibre thermique atteint en fin de simulation. * Flux imposé : elle se révèle meilleure que le Gdimp (et donc le TGD) et aussi performant que l'approche GS asynchrone. * Conduction imposée : elle est aussi performante que l'approche GS asynchrone * Convection/Rayonnement correctement pris en compte (aussi avec le TGD et le Gdimp). <p>\Rightarrow Elle offre le meilleur compromis entre la précision et le temps de calcul.</p> <p>✓ Attention aux jeux de paramètres (h, dt, CI et CL) !!</p> <p>✓ Possibilité de couplage avec le Gdimp si choc thermique trop prépondérant.</p>

TAB. 3.16 – *Bilan de la formulation Mixte continue.*

Finalement, cette étude comparative [Pelissou 2004] nous permet de conclure sur le fait que le modèle Mixte est le plus approprié pour résoudre le problème thermique mixte instationnaire.

Dans le chapitre suivant, nous nous proposons d'introduire le couplage mécanique et d'évaluer le comportement de la formulation Mixte lors de la résolution des problèmes thermomécaniques fortement couplés.

Chapitre 4

Couplage thermomécanique

Jusqu'à présent, nous avons uniquement abordé la modélisation et diverses techniques de résolution du problème thermique instationnaire qui se révèle indispensable pour la simulation numérique des procédés de mise en forme des métaux. Cependant, au cours du procédé du forgeage (à chaud, à tiède ou à froid), la pièce initiale va subir d'importantes déformations à température élevée au contact des outillages; ce qui nous conduit dès lors à résoudre un problème thermomécanique fortement couplé.

Ce dernier chapitre est donc consacré au couplage thermomécanique pour les diverses étapes du forgeage à chaud.

Nous commencerons par présenter brièvement la modélisation puis la résolution du problème mécanique mixte en vitesse/pression avant d'analyser la nature du couplage entre ce problème mécanique et le problème thermique mixte en température/flux de chaleur.

Enfin, nous finirons par quelques applications numériques simples et industrielles avec l'utilisation de la formulation Mixte continue P_1/P_1 pour résoudre le problème thermique instationnaire.

4.1 Formulation et résolution du problème mécanique

Dans cette partie, nous décrivons le problème mécanique relatif à la mise en forme des matériaux par le procédé de forgeage.

La discrétisation du problème mécanique sera ensuite abordée par la méthode des éléments finis, avant d'introduire les diverses étapes de la résolution numérique.

4.1.1 Modélisation mécanique du forgeage

Tout d'abord rappelons que le métal chaud à forger, appelé lopin, est assimilé à un milieu continu homogène. Nous nous plaçons donc dans le cadre de la mécanique des milieux continus pour suivre l'évolution du comportement de ce métal, occupant un domaine Ω_t fini à l'instant t .

Afin de modéliser les mécanismes régissant la déformation du matériau, nous ajouterons des équations relatives à la loi de comportement. D'autre part, pour que le problème mécanique soit complet et correctement posé, nous devons également introduire des conditions aux limites, à la fois sur les surfaces libres qu'en contact, c'est à dire ajouter des équations supplémentaires intégrant le comportement aux interfaces (lois tribologiques des interfaces).

4.1.1.1 Equations de conservation

L'écoulement de la matière forgée lors de la mise en forme vérifie les principes fondamentaux de la MMC que sont la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement qui donne l'équation d'équilibre.

a) Loi de conservation de la masse

Ce premier principe de conservation stipule que la masse d'un système matériel reste constante au cours du temps, c'est à dire, en notant ρ la densité :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(x,t) dx &= 0 \quad \forall D_t \subset \Omega_t \\ \Leftrightarrow \int_{D_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) \right] dx &= 0 \quad \forall D_t \subset \Omega_t \end{aligned} \quad (4.1)$$

Comme le sous-domaine D_t est pris quelconque dans le domaine Ω_t , l'expression (4.1) peut se mettre sous la forme locale :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad \text{dans } \Omega_t} \quad (4.2)$$

Cette écriture locale (4.2) est encore appelée **l'équation de continuité**.

Remarque 4.1 *Le matériau étant considéré comme homogène et parfaitement incompressible (avec une densité ρ constante), la conservation de la masse revient à satisfaire l'équation d'incompressibilité :*

$$\boxed{\operatorname{div}(v) = 0 \quad \text{dans } \Omega_t} \quad (4.3)$$

b) Loi de conservation de la quantité de mouvement

Pour un solide occupant un domaine Ω_t , l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'exprime au moyen du tenseur symétrique des contraintes σ (relié à la loi de comportement), des forces volumiques f (décrivant par exemple les forces de gravité) et du champ de vitesse v de la matière :

$$\boxed{\operatorname{div}(\sigma) + \rho f = \rho \frac{dv}{dt} \quad \text{dans } \Omega_t} \quad (4.4)$$

Au cours du procédé de forgeage, il est courant de négliger les effets d'inertie et de gravité par rapport aux efforts plastiques. En effet, pour un lopin d'acier de 10cm , les forces de gravité ne représentent que 1% des efforts plastiques. D'autre part, les forces d'inertie dépasseraient le $10^{\text{ème}}$ des forces de déformation à condition d'atteindre localement une vitesse de 50m/s [Boyère 1999].

Sous ces deux hypothèses, le matériau se déformera uniquement sous l'effet des forces imposées par les outillages. Dans ces conditions, l'équation (4.4) se réduit en obtenant la condition de nullité de la divergence du tenseur des contraintes, appelée **l'équation d'équilibre** :

$$\boxed{\operatorname{div}(\sigma) = 0 \quad \text{dans } \Omega_t} \quad (4.5)$$

b) Bilan des lois de conservation

Finalement, dans le cadre de la mise en forme des métaux, le système d'équations régissant les lois de conservation se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(v) = 0 & \text{dans } \Omega_t \\ \operatorname{div}(\sigma) = 0 & \text{dans } \Omega_t \end{cases} \quad (4.6)$$

D'un point de vue mathématique, ce système (4.6) est incomplet. Il faut donc rajouter à ces lois de conservation une relation reliant la contrainte à la déformation (par une loi appelée loi de comportement) ainsi que des conditions aux limites (avec une ou plusieurs lois tribologiques à l'interface).

4.1.1.2 Lois de comportement

Les lois rhéologiques de comportement modélisent l'écoulement et la déformation de la matière au cours de sa mise en forme, lorsque des contraintes lui sont appliquées. Afin d'analyser le comportement du matériau, différentes sollicitations mécaniques et thermiques sont effectuées en vue de déduire et de dresser le bilan des paramètres caractérisant alors son comportement.

En général, la loi rhéologique est une relation reliant la contrainte σ à la déformation ε , à la vitesse de déformations $\dot{\varepsilon}$ et à la température T .

L'état des contraintes du matériau est défini par le tenseur des contraintes de Cauchy σ qui se décompose en :

- une partie déviatorique s représentant le cisaillement,
- et une partie sphérique pI représentant la pression hydrostatique p , I étant la matrice identité.

$$\sigma = s - pI \quad \text{avec} \quad p = -\frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma) \quad (4.7)$$

Le tenseur des vitesses de déformation $\dot{\varepsilon}$ s'exprime par la relation :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla v + {}^T \nabla v) \quad (4.8)$$

La contrainte équivalente de Von-Mises est donnée par :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s : s} \quad (4.9)$$

Le taux de déformation généralisé s'exprime :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon}} \quad (4.10)$$

A l'instant t du procédé, la valeur de la déformation équivalente est obtenue par intégration temporelle :

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}} dt \quad (4.11)$$

La température du procédé de forgeage influant sur la loi rhéologique, plusieurs types de comportement de la matière se distinguent.

- Au cours du procédé du forgeage à chaud, la déformation élastique est souvent négligée : la loi viscoplastique (ou la loi thermo-viscoplastique) modélise le comportement du matériau.
- Au cours du procédé du forgeage à froid, l'élasticité ne peut plus être négligée : le comportement du matériau est alors modélisé par des lois élastoplastiques, ou élasto-viscoplastiques ou encore thermo-élasto-viscoplastiques.

a) Loi viscoplastique

Pour les problèmes de mise en forme des métaux à chaud, le comportement de la pièce peut être considéré comme viscoplastique. En effet, lors de la modélisation de l'écoulement de la matière à chaud, la composante élastique de la déformation est négligeable devant la composante visqueuse (avec $\dot{\varepsilon}^{el} = 0$).

Dans la majorité des cas de simulation du forgeage, la pièce subit de grandes transformations, en se ramenant à un problème de grandes déformations. Par différenciation du problème et décomposition du temps de mise en forme en petits intervalles de temps, on peut se ramener à une formulation basée sur le tenseur des vitesses de déformations $\dot{\varepsilon}$ pour décrire les phénomènes.

Grâce à la thermodynamique des milieux continus, un potentiel viscoplastique φ relie le tenseur déviateur des contraintes s à la vitesse de la déformation plastique $\dot{\varepsilon}$ par :

$$s = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}} \quad (4.12)$$

En combinant la définition du taux de déformation généralisé (4.10) à l'expression (4.13) ci-dessous du potentiel viscoplastique de Norton-Hoff

$$\varphi = \frac{K}{m+1} \left[\sqrt{3} \dot{\bar{\varepsilon}} \right]^{m+1} \quad (4.13)$$

la loi de comportement de Norton-Hoff va s'écrire :

$$s = 2 K \left[\sqrt{3} \dot{\varepsilon} \right]^{m-1} \dot{\varepsilon} \quad (4.14)$$

K représentant la consistance du matériau et m la sensibilité à la vitesse de déformation.

Il faut également préciser que dans notre cas, la consistance K peut dépendre de la température : cette dépendance décrit les phénomènes d'écrouissage pour un matériau thermo-écrouissable. Quelques lois d'écrouissage sont introduites dans le § 4.2.1.1 en évoquant la nature du couplage thermomécanique.

Remarque 4.2 *Loi thermo-viscoplastique.*

Lors du forgeage à chaud, on peut également rencontrer un comportement thermo-viscoplastique de la pièce. La déformation va alors se décomposer en :

- une partie thermique qui peut être déduite de la loi classique thermo-élastique :

$$\dot{\varepsilon}^{th} = \alpha \dot{T} I \quad (4.15)$$

où α est le coefficient de la dilatation thermique et \dot{T} la vitesse de refroidissement.

- et en une partie viscoplastique décrite par la loi de Norton-Hoff (4.14) avec :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{vp} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\bar{\sigma}}{K \sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{s}{\bar{\sigma}} \\ s &= 2 K \left[\sqrt{3} \dot{\varepsilon} \right]^{m-1} \dot{\varepsilon} \\ \bar{\sigma} &= K \sqrt{3} \left[\sqrt{3} \dot{\varepsilon} \right]^m \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{3}{2} \dot{\varepsilon} \frac{s}{\bar{\sigma}} \quad (4.16)$$

$$\text{Soit la loi thermo-viscoplastique} \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}^{vp} + \dot{\varepsilon}^{th} \\ \dot{\varepsilon}^{vp} &= \frac{3}{2} \dot{\varepsilon} \frac{s}{\bar{\sigma}} & \text{et} & \quad Tr(\dot{\varepsilon}^{vp}) = 0 \\ \dot{\varepsilon}^{th} &= \alpha \dot{T} I & \text{et} & \quad Tr(\dot{\varepsilon}^{th}) = 3 \alpha I \end{aligned} \right. \quad (4.17)$$

b) Loi thermo-élasto-viscoplastique

Cette dernière loi de comportement permet de simuler le traitement thermique mettant en jeu différents aspects numériques (comme le contact, le frottement, le remaillage) et de forts gradients thermiques (une gamme de température très large) qui influencent fortement le comportement du matériau tout au long du procédé.

Dans le cas de traitement thermique, la déformation totale est faible ($\simeq 1\%$) et se trouve le plus souvent dans le domaine des déformations élastiques. Cependant, paradoxalement, les déformations plastiques induites, infiniment petites, sont les principales causes des contraintes résiduelles et des distorsions de trempe.

Introduite par [Aliaga 2000] dans le code Forge3[®], la loi de comportement thermo-élasto-viscoplastique modélise l'ensemble du processus de trempe et représente la rhéologie du matériau depuis son comportement visqueux à chaud jusqu'au comportement élastoplastique à froid, voire même avec un retour élastique en fin du traitement.

Puisque le comportement thermo-élasto-viscoplastique est une généralisation des différentes lois rhéologiques, le tenseur des vitesses de déformation $\dot{\varepsilon}$ va s'exprimer comme étant la somme des vitesses de déformation élastique $\dot{\varepsilon}^{el}$ et viscoplastique $\dot{\varepsilon}^{vp}$ et d'une composante thermique de la vitesse de la déformation $\dot{\varepsilon}^{th}$, en considérant la dilatation thermique du matériau (thermo-élastique). Ce qui nous conduit à la décomposition suivante :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{vp} + \dot{\varepsilon}^{th} \\ \dot{\varepsilon}^{el} &= D^{-1} \dot{\sigma} \\ \dot{\varepsilon}^{vp} &= \frac{3}{2} \dot{\varepsilon} \frac{s}{\bar{\sigma}} \quad \text{et} \quad Tr(\dot{\varepsilon}^{vp}) = 0 \\ \dot{\varepsilon}^{th} &= \alpha \dot{T} I \quad \text{et} \quad Tr(\dot{\varepsilon}^{th}) = 3\alpha I \end{cases} \quad (4.18)$$

La partie élastique est décrite par la loi de Hooke [Bousseta 2005] alors que la composante viscoplastique suit la loi de Norton-Hoff (4.14).

4.1.1.3 Conditions initiales et aux limites mécaniques

Les conditions initiales du problème mécanique sont données par la position initiale.

Pour ce qui est des conditions aux limites, notons par Γ la frontière du domaine Ω occupé par le matériau. Cette frontière se décompose en une réunion de quatre parties disjointes $\Gamma = \Gamma_l \cup \Gamma_f \cup \Gamma_v \cup \Gamma_c$ sur lesquelles on impose des conditions aux limites décrites sur la figure 4.1.

- Sur la surface libre Γ_l , la contrainte normale σn est nulle : $\sigma n = 0$.
- Sur la frontière à chargement imposé Γ_f , la contrainte normale est égale au vecteur contrainte imposé F tel que : $\sigma n = F$.
- La vitesse est imposée sur la frontière Γ_v : $v = v_{imp}$ avec v_{imp} la vitesse imposée. Ce cas de figure peut par exemple modéliser un contact bilatéral collant entre un corps rigide (vitesse connue) et un corps déformable.
- Enfin le matériau est en contact avec les outils au niveau de la surface Γ_c . Le contact s'accompagnant généralement de frottement, diverses conditions de contact et de frottement peuvent être définies sur cette surface de contact. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

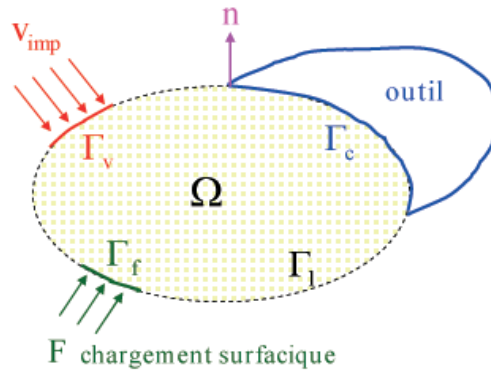


FIG. 4.1 – Modélisation des conditions aux limites du problème mécanique.

4.1.1.4 Contact et frottement : problèmes d'interface

Bien que cela ne concerne pas les objectifs de ce manuscrit, on résume les conditions de contact et de frottement entre un corps déformable (pièce) et un outil rigide, qui ont une évolution temporelle faisant partie des inconnues du problème mécanique [Barboza 2004, Terzolo 2004].

a) Condition de contact

Plusieurs types de contact peuvent être imposés sur la surface Γ_c : il peut s'agir d'un contact unilatéral ou bilatéral (décollement autorisé ou impossible des noeuds en contact), avec comme spécificité supplémentaire d'être collant ou glissant (déplacement tangentiel interdit ou permis des noeuds en contact).

Généralement, la condition relative au contact unilatéral est retenue. Ce type de contact est décrit par les conditions classiques de Signorini qui imposent la non pénétration des noeuds de la pièce dans l'outillage :

$$\left\{ \begin{array}{l} (v - v_{out}) \cdot n \geq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ \left\{ (v - v_{out}) \cdot n \right\} \sigma_n = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (4.19)$$

avec v la vitesse sur le corps déformable, v_{out} celle sur le corps rigide, n la normale sortante par rapport à l'outil (figure 4.1) et $\sigma_n = \sigma n \cdot n$ la pression de contact.

b) Loi de frottement

Généralement, le contact ne se fait pas sans frottement, sauf si on le néglige volontairement. Par conséquent, nous devons prendre en compte une condition relative au frottement entre le lopin et les outils de forgeage sur Γ_c .

Le frottement est l'existence de forces s'exerçant sur une interface entre deux corps et tendant à s'opposer au mouvement tangentiel entre eux. Cela se traduit par l'existence d'une contrainte tangentielle, appelée la cission de frottement τ :

$$\tau = \sigma n - \sigma_n n \quad (4.20)$$

Définir une loi de frottement, c'est mettre en relation τ et diverses grandeurs physiques qui vont l'influencer. La formulation intuitive des lois de frottement qui permettent donc de modéliser le frottement à l'interface entre deux corps en contact quand un mouvement de glissement se produit entre eux, s'exprime dans la plupart des cas à l'aide de la vitesse de glissement. Cependant, une écriture en déplacement peut-être préférée.

Dans la pratique, il faut exercer une force tangentielle minimale pour faire apparaître un glissement entre ces deux corps en contact. Plusieurs lois de frottement existent. Enumérons les principales.

Pour cela, introduisons la vitesse de glissement tangentielle Δv_g définie par :

$$\Delta v_g = (v - v_{out}) - \left[(v - v_{out}) \cdot n \right] n \quad (4.21)$$

• **Loi de Tresca**

La loi de Tresca dérive des lois de comportement plastiques incompressibles. Cette loi relie la cission de frottement τ à la contrainte d'écoulement du matériau σ_0 par le coefficient de frottement de Tresca \bar{m} :

$$\tau = -\bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\Delta v_g}{\|\Delta v_g\|} \quad \text{avec } 0 \leq \bar{m} \leq 1 \quad (4.22)$$

• **Loi de Coulomb**

La loi de frottement de Coulomb relie la cission critique de frottement τ_c à la pression de contact $p_c = -\sigma_n$ par le coefficient de frottement μ :

$$\tau_c = \mu p_c \frac{\Delta v_g}{\|\Delta v_g\|} \quad (4.23)$$

• **Loi puissance : loi de frottement viscoplastique**

Enfin, la loi puissance, encore appelée la loi de frottement de Norton, est souvent utilisée en forgeage à chaud avec de fortes pressions de contact. Dérivant du comportement visqueux, elle relie la cission de frottement τ à la vitesse de glissement tangentielle Δv_g :

$$\tau = -\alpha_f K \|\Delta v_g\|^{q-1} \Delta v_g \quad (4.24)$$

avec α_f le coefficient de frottement, q le coefficient de sensibilité à la vitesse de glissement et K la consistance du matériau.

4.1.1.5 Récapitulatif des équations mécaniques relatives au procédé du forgeage

Si l'on tient compte de l'ensemble des équations précédemment établies, la formulation continue du problème mécanique va compter neuf inconnues : trois scalaires pour la vitesse et six pour la contrainte. Bien évidemment, nous n'allons pas résoudre ce problème mixte en vitesse/contrainte mais en vitesse/pression : la contrainte σ est alors exprimée par sa décomposition déviatorique et s par la loi de comportement.

Récapitulons alors l'ensemble des équations régissant le problème mécanique fort, sous sa forme mixte en vitesse/pression. Il s'agit de trouver les champs (v, p) vérifiant l'équation d'équilibre (munie d'une loi de comportement) et l'équation d'incompressibilité, avec un certain nombre de conditions initiales et aux limites tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\sigma) = \operatorname{div}(s) - \nabla p = 0 & \text{équation d'équilibre} \\ \operatorname{div}(v) = 0 & \text{équation d'incompressibilité} \\ s = 2K \left[\sqrt{3} \dot{\varepsilon} \right]^{m-1} \dot{\varepsilon} & \text{loi de comportement de Norton-Hoff} \\ (v - v_{out}) \cdot n \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c & \text{contact unilatéral} \\ \tau = -\alpha_f K \|\Delta v_g\|^{q-1} \Delta v_g \quad \text{sur } \Gamma_c & \text{loi de frottement de Norton} \end{array} \right. \quad (4.25)$$

La formulation forte du problème mécanique étant établie, nous poursuivons cette étude avec l'utilisation de la méthode des éléments finis en vue de résoudre numériquement le problème mécanique.

4.1.2 Discrétisation du problème mécanique

Nous avons besoin de formuler plus faiblement le problème (4.25) avant de présenter les deux étapes essentielles de la discrétisation du problème mécanique mixte instationnaire.

4.1.2.1 Formulation faible mécanique

En utilisant des fonctions tests appropriées ainsi que la formule de Green, ou encore en appliquant directement le Principe des Puissances Virtuelles, nous obtenons, à partir de l'équation d'équilibre et de l'équation d'incompressibilité, la formulation faible associée au problème mécanique fort (4.25).

En notant \mathcal{V} l'espace des vitesses cinématiquement admissibles, par \mathcal{V}_0 l'espace des vitesses cinématiquement admissibles à zéro et \mathcal{P} l'espace des pressions p tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{V} &= \left\{ v \in [H^1(\Omega)]^3, (v - v_{out}) \cdot n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\} \\ \mathcal{V}_0 &= \left\{ v \in \mathcal{V}, v \cdot n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\} \\ \mathcal{P} &= L^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.26)$$

la formulation variationnelle mixte en vitesse/pression s'écrit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} s(v) : \dot{\varepsilon}(v^*) d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v^*) d\Omega - \int_{\Gamma_c} \tau \cdot v^* d\Gamma = 0 \quad \forall v^* \in \mathcal{V}_0 \\ \int_{\Omega} p^* \operatorname{div}(v) d\Omega = 0 \quad \forall p^* \in \mathcal{P} \end{cases} \quad (4.27)$$

De plus, si l'on considère la loi rhéologique de Norton-Hoff (4.14) et la loi de frottement puissance (4.24), cette formulation faible devient pour $\forall (v^*, p^*) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{P}$:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2K (\sqrt{3} \dot{\varepsilon}(v))^{m-1} \dot{\varepsilon}(v) : \dot{\varepsilon}(v^*) d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v^*) d\Omega + \int_{\Gamma_c} \alpha_f K \|\Delta v_g\|^{q-1} \Delta v_g v^* d\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega} p^* \operatorname{div}(v) d\Omega = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

La formulation variationnelle étant établie, nous sommes capables de calculer la solution mixte (v, p) de ce problème en introduisant une approximation spatiale par la méthode des éléments finis. Comme ce problème est instationnaire avec donc des inconnues dépendant à la fois des variables spatiale (x) et temporelle (t) , nous commençons par introduire la discrétisation temporelle avant de nous intéresser à l'approximation spatiale.

4.1.2.2 Discrétisation temporelle

Afin de prendre en compte l'évolution de la géométrie au cours du temps, il faut ajouter (puis résoudre) l'équation d'évolution (4.29) au problème où $x(t)$ représente la position en chaque point matériel :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= v(t, x(t)) \quad \forall x \in \Omega^t \\ x(0) &= x^0 \quad \text{avec } x^0 \in \Omega^0 \text{ donné} \end{cases} \quad (4.29)$$

Nous allons donc fractionner l'intervalle de temps \mathcal{T}_{sim} (correspondant à la durée de l'ensemble de la simulation) en N incréments, définis par des pas de temps Δt^i tels que :

$$\mathcal{T}_{sim} = \cup_{i=1}^N [t^i, t^i + \Delta t^i]$$

La configuration Ω^t étant connue à l'instant t , la solution (v^t, p^t) satisfaisant l'équilibre à cet instant peut être déterminée. La nouvelle configuration à l'instant suivant $(t + \Delta t)$ sera donc calculée à partir de la configuration précédente au temps t .

Un des schémas d'intégration temporelle utilisé pour résoudre l'équation (4.29) est un schéma de type Euler explicite. Entre deux incréments de temps consécutifs t et $t + \Delta t$, l'écoulement du matériau s'écrit :

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t v(t, x(t)) \quad \Leftrightarrow \quad x^{t+\Delta t} = x^t + \Delta t v^t$$

Cela revient donc à supposer que la vitesse reste constante pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$.

4.1.2.3 Discrétisation spatiale

a) Principe

La discrétisation par éléments finis consiste à déterminer la solution de la formulation variationnelle (4.27) non plus dans les espaces continus \mathcal{V} et \mathcal{P} , mais dans des sous-espaces d'approximation de dimension finie \mathcal{V}_h et \mathcal{P}_h , contenant la solution mixte (v_h, p_h) du problème discret, h étant la taille de maille.

Ces sous-espaces sont définis par une partition du domaine Ω_h (approximation du domaine Ω) en une réunion d'éléments finis, appelée triangulation et notée \mathcal{T}_h , avec :

$$\Omega_h = \bigcup_{e \in \mathcal{T}_h} \Omega_e$$

et pour $i \neq j$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \{0\}$ ou contient un sommet, une arête ou une face.

A cause du couplage entre le champ de vitesse et de pression, les espaces d'approximations ne peuvent être pris indépendamment; ce qui entraîne un choix non trivial des éléments finis.

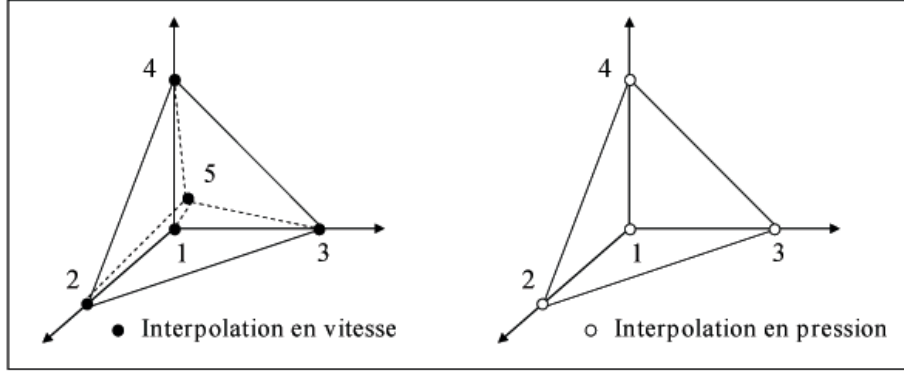
En effet, l'existence et l'unicité de la solution (v_h, p_h) ne seront assurées que si ces espaces d'approximation vérifient la condition de compatibilité de Brezzi-Babuška [Brezzi-Fortin 1991] : cette condition de compatibilité est en fait une condition de stabilité spatiale à laquelle est combinée une condition de consistance, assurant ainsi la convergence de la solution mixte (v_h, p_h) vers celle du problème fort (v, p) lorsque h tend vers zéro.

b) Choix de l'élément fini mixte P_1^+/P_1 [Coupez 1991]

Un choix possible pour vérifier la condition de Brezzi-Babuška est d'opter pour l'élément fini tétraédrique mixte P_1^+/P_1 (cf figure 4.2). Détaillons cet élément P_1^+/P_1 quasi-linéaire, encore appelé le "mini-élément".

- Les champs de vitesse et de pression sont interpolés linéairement en fonction de chacune des valeurs nodales du tétraèdre.

- Le champ de vitesse est enrichi par le rajout d'un élément bulle (rajout d'un degré de liberté) au centre de l'élément. Cet ajout, noté + a pour conséquence de satisfaire la compatibilité de l'élément P_1^+/P_1 entre l'interpolation de la pression et celle de la vitesse.
- La fonction bulle s'annule sur les faces du tétraèdre et est continue sur les quatre sous-tétraèdres, définis par les quatre sommets et le centre de gravité du tétraèdre.

FIG. 4.2 – Configuration 3D de l'élément fini mixte P_1^+/P_1 en v/p .

En rappelant que P_1 est l'interpolation linéaire et que Ω_i^e ($i = 1$ à 4) sont les quatre sous-éléments (ou sous-tétraèdres) de l'élément tétraédrique Ω^e , les espaces d'approximations se forment comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_h = \left\{ p_h \in \mathcal{C}^0(\Omega_h) \text{ tq } \forall e \in T_h, p_h|_{\Omega^e} \in P_1(\Omega^e) \right\} \\ \mathcal{V}_h = \mathcal{L}_h \oplus \mathcal{B}_h \\ \mathcal{L}_h = \left\{ v_h \in [\mathcal{C}^0(\Omega_h)]^3 \text{ tq } \forall e \in T_h, v_h|_{\Omega^e} \in [P_1(\Omega^e)]^3 \text{ et } (v_h - v_{out}) \cdot \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\} \\ \mathcal{B}_h = \left\{ b_h \in [\mathcal{C}^0(\Omega_h)]^3 \text{ tq } \forall e \in T_h, b_h|_{\Omega_i^e} \in [P_1(\Omega_i^e)]^3 \text{ et } b_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i^e \right\} \end{array} \right.$$

En notant respectivement N^l et N^b les fonctions de bases linéaires et bulle, les champs de vitesse et de pression discrets sont approximés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_h = v_h^l + b_h = \sum_{i=1}^{nbnoe} v_i^l N_i^l + \sum_{k=1}^{nbelt} b_k N_k^b \\ p_h = \sum_{i=1}^{nbnoe} p_i N_i^l \end{array} \right. \quad (4.30)$$

avec les notations :

- $nbnoe$ et $nbelt$ le nombre de noeuds et d'éléments dans le maillage.
- N_i^l la fonction d'interpolation d'ordre 1 associée au noeud i . Cette fonction est utilisée pour l'interpolation des champs de vitesse et de pression : elle vaut 1 au noeud i et 0 sur les autres noeuds de l'élément.
- N_k^b la fonction d'interpolation d'ordre 2 associée à l'élément k . Cette fonction est utilisée pour l'interpolation du terme bulle du champ de vitesse : elle vaut 1 au centre de sous-élément et 0 sur la frontière de l'élément.

Le problème discret (4.27) s'écrit à chaque incrément de temps $[t^n, t^{n+1}]$:

Trouver $(v_h, p_h) \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{P}_h$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h} s(v_h) : \dot{\varepsilon}(v_h^*) dv - \int_{\Omega_h} p_h \operatorname{div}(v_h^*) dv - \int_{\Gamma_{hc}} \tau(v_h) \cdot v_h^* ds = 0 \quad \forall v_h^* \in \mathcal{V}_h^0 \\ \int_{\Omega_h} p_h^* \operatorname{div}(v_h) dv = 0 \quad \forall p_h^* \in \mathcal{P}_h \\ \text{où } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_h^0 = \mathcal{V}_h^{l0} \oplus \mathcal{B}_h \\ \mathcal{V}_h^{l0} = \left\{ v_h \in \mathcal{L}_h \text{ tq } v_h \cdot n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.31)$$

En considérant la décomposition du champ de vitesse (4.30), le problème discret (4.31) se réécrit :

Trouver $(v_h^l, b_h, p_h) \in \mathcal{V}_h^{l0} \times \mathcal{B}_h \times \mathcal{P}_h$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h} s(v_h^l + b_h) : \dot{\varepsilon}(v_h^{l*}) dv - \int_{\Omega_h} p_h \operatorname{div}(v_h^{l*}) dv - \int_{\Gamma_{hc}} \tau(v_h^l) \cdot v_h^{l*} ds = 0 \quad \forall v_h^{l*} \in \mathcal{V}_h^{l0} \\ \int_{\Omega_h} s(v_h^l + b_h) : \dot{\varepsilon}(b_h^*) dv - \int_{\Omega_h} p_h \operatorname{div}(b_h^*) dv = 0 \quad \forall b_h^* \in \mathcal{B}_h \\ \int_{\Omega_h} p_h^* \operatorname{div}(v_h^l + b_h) dv = 0 \quad \forall p_h^* \in \mathcal{P}_h \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Avec l'annulation du champ bulle sur la frontière, le terme de frottement n'apparaît plus dans la deuxième équation de (4.32).

c) Traitement numérique du contact

Le caractère instationnaire du problème mécanique induisant une gestion incrémentale du contact, il faut au préalable introduire la notion de distance à l'outil, plus exactement la distance de pénétration, notée δ et calculée dans la direction normale de l'outil (figure 4.3), avec la convention suivante si au cours d'un incrément de calcul, un noeud de la zone de contact quitte le contact ou pénètre dans l'outil :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta > 0 : \text{noeud à l'extérieur de l'outil} \\ \delta = 0 : \text{noeud à la surface} \\ \delta < 0 : \text{noeud intérieur à l'outil} \end{array} \right.$$

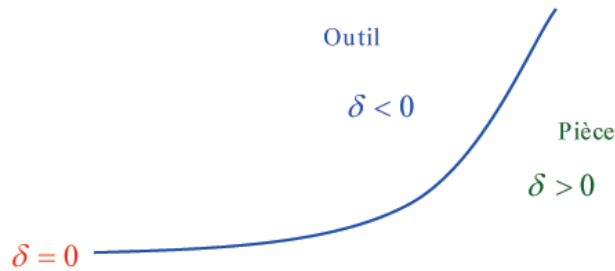


FIG. 4.3 – Distance de pénétration.

Cette condition de contact est prise en compte dans la formulation discrète (4.32) du problème de forgeage, par la méthode de pénalisation [Barboza 2004]. Cette technique consiste à introduire un facteur de pénalisation ϱ au niveau de la condition de contact ce qui modifie la formulation faible discrète :

$$\text{Trouver } (v_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{P}_h \text{ tels que } \forall (v_h^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{P}_h : \quad (4.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h} s(v_h^l + b_h) : \dot{\varepsilon}(v_h^{l*}) dv - \int_{\Omega_h} p_h \operatorname{div}(v_h^{l*}) dv - \int_{\Gamma_{hc}} \tau(v_h^l) \cdot v_h^{l*} ds \\ \quad - \varrho \sum_{k \in \Gamma_{hc}} \left[(v_k - v_{out}) n_k - \frac{\delta^k}{\Delta t} \right]^+ S_k v^* \cdot n = 0 \\ \int_{\Omega_h} s(v_h^l + b_h) : \dot{\varepsilon}(b_h^*) dv - \int_{\Omega_h} p_h \operatorname{div}(b_h^*) dv = 0 \\ \int_{\Omega_h} p_h^* \operatorname{div}(v_h^l + b_h) dv = 0 \end{array} \right.$$

avec la notation $[x]^+ = \frac{x + |x|}{2}$. S_k est la surface associée au noeud k , utilisée pour affecter un poids plus fort aux noeuds liés à des faces frontières de plus grande surface, avec $S_k = \int_{\Gamma_{hc}} N_k ds$.

4.1.3 Résolution numérique

Le système non linéaire précédemment obtenu peut se réécrire sous une forme plus schématique en remplaçant chaque intégrale de (4.33) par le vecteur R :

$$\left\{ \begin{array}{l} R^v(v_h^l, b_h, p_h) = 0 \\ R^b(v_h^l, b_h, p_h) = 0 \\ R^p(v_h^l, b_h, p_h) = 0 \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Ce problème, rendu fortement non linéaire par les termes de comportement, de contact et de frottement, est résolu par la méthode itérative de Newton-Raphson.

Soit \mathbf{K} la matrice Hessienne (ou de raideur) définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} K^{xy}(x, y) = \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} \\ \text{avec } (x, y) = \{ (v, v), (v, p), (p, v), (b, b), (b, p), (p, b), (b, v), (v, b) \} \end{array} \right. \quad (4.35)$$

A chaque itération n de la méthode de Newton-Raphson, un système linéaire de la forme suivante doit être résolu :

$$\begin{bmatrix} K^{vv} & K^{vb} & K^{vp} \\ {}^\top K^{vb} & K^{bb} & K^{bp} \\ {}^\top K^{vp} & {}^\top K^{bp} & K^{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v \\ \delta b \\ \delta p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^v \\ R^b \\ R^p \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

où $(\delta v, \delta b, \delta p)$ sont les corrections apportées à la solution (v_h^l, b_h, p_h) à l'itération suivante $n + 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} v^{n+1} = v^n + \delta v \\ b^{n+1} = b^n + \delta b \\ p^{n+1} = p^n + \delta p \end{array} \right. \quad (4.37)$$

En remarquant que le terme K^{pp} de la matrice hessienne est nulle et en utilisant une propriété du champ bulle $K^{vb} = K^{bv} = 0$, le système (4.36) se simplifie :

$$\begin{bmatrix} K^{vv} & 0 & K^{vp} \\ 0 & K^{bb} & K^{bp} \\ {}^\top K^{vp} & {}^\top K^{bp} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v \\ \delta b \\ \delta p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^v \\ R^b \\ R^p \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

La contribution locale sur un élément Ω_e de la triangulation étant identique à la contribution globale, on utilise une technique de condensation locale de la bulle afin de supprimer des équations de (4.38) le degré de liberté supplémentaire lié à la bulle :

$$\delta b^e = - (K^{bb})^{-1} (R^b + K^{bp} \delta p) \quad (4.39)$$

On obtient alors une formulation mixte en vitesse/pression avec pour seules inconnues nodales les trois composantes du champs de vitesse et celles de la pression :

$$\begin{bmatrix} A & D \\ {}^\top D & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v \\ \delta p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^v \\ R^{bp} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

avec $\begin{cases} A &= K^{vv} \\ D &= K^{vp} \\ L &= {}^\top K^{bp} K^{bb^{-1}} K^{bp} \\ R^{bp} &= R^p - {}^\top K^{bp} K^{bb^{-1}} R^b \end{cases}$

Le système linéaire (4.40) est ensuite résolu par une méthode itérative type Résidu Minimal Préconditionné. Une technique de stockage compact de la matrice du système est associée à la méthode de résolution permettant ainsi d'optimiser le coût des calculs.

Remarque 4.3 *C'est par l'intermédiaire de la matrice de condensation locale de la bulle L que la contribution de la bulle est présente de manière sous-jacente dans (4.40).*

Remarque 4.4 Lien avec la condition de compatibilité pour le problème thermique stationnaire
Il est intéressant de remarquer que pour discrétiser le problème thermique mixte stationnaire (valable aussi pour l'instationnaire), la condition de compatibilité est satisfaite en utilisant des éléments finis mixtes P_1/P_1 ; sous-entendu qu'il n'est pas utile d'avoir recours aux éléments finis mixtes P_1^+/P_1 comme pour le problème mécanique. En effet, si on revient à l'écriture stationnaire du problème thermique mixte :

$$\begin{cases} \vec{q} + k \vec{\nabla} T = 0 \\ \text{div}(\vec{q}) = \dot{w} \\ + \text{conditions initiales et aux limites classiques} \end{cases} \quad (4.41)$$

et à l'expression matricielle de sa formulation Mixte discrète éléments finis P_1/P_1 :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ {}^\top B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

on constate que la matrice symétrique résultante est à diagonale non nulle, avec $D \neq 0$ provenant des conditions aux limites thermiques. Le fait que D soit non nulle permet de satisfaire la condition de Brezzi-Babuška pour les éléments thermiques P_1/P_1 et de ne pas avoir à utiliser les éléments P_1^+/P_1 .

4.2 Couplage avec le problème thermique

En s'intéressant à la simulation numérique des procédés de mise en forme des métaux, le couplage thermomécanique a, à plusieurs reprises, fait l'objet de nombreux travaux au CEMEF. On peut notamment citer ceux de :

- [Chenot et al. 1992] pour la forge et plus récemment ceux de [Mocellin-Terzolo 2004] pour l'approche multicorps en version parallèle,
- [Colonna 1992] pour le traitement thermique puis plus récemment ceux de [Aliaga 2000],
- [Jaouen 1998] pour la fonderie
- [Heinrich 2003] pour la coulée continue d'acier en 2D et [Costes 2004] en 3D.

Dans la littérature, on trouve également beaucoup d'exemples et d'applications, tels que [Micari et al. 1995], [César et al. 1996], [Fernandes et al. 1999] ou encore ceux de [Bergman 2004].

4.2.1 Nature du couplage thermomécanique

La nature du couplage varie selon la technique utilisée pour la mise en forme des métaux, avec un couplage thermique plus ou moins prédominant. Le couplage va s'effectuer de deux manières, en fonction de la thermodépendance de certaines variables mécaniques puis, en fonction de la dépendance des variables thermiques par rapport à certaines grandeurs mécaniques (comme la déformation, le frottement).

4.2.1.1 Variables mécaniques thermodépendantes

Le couplage thermomécanique va être pris en compte par l'actualisation des variables mécaniques thermodépendantes à la fin de chaque incrément de temps.

Plus précisément les équations s'écrivent : $\sigma = D(T) \cdot \varepsilon^e$ et $s = 2K(T) \cdot \left[\sqrt{3} \dot{\varepsilon} \right]^{m-1} \dot{\varepsilon}$.

Dans le cas de forgeage, pour un matériau thermo-écrouissable, l'écrouissage sera décrit par la consistance K dépendant de la température T . Plusieurs modèles peuvent être utilisés, pour prendre en compte la dépendance de la consistance à la température :

$$\begin{cases} K(T, \bar{\varepsilon}) = K_0 (\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^n e^{(\beta/T)} & \text{loi couramment utilisée} & (a) \\ K(T, \bar{\varepsilon}) = K_0 (\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^n e^{(-\beta/T)} & & (b) \\ s = A * e^{m_1 T} * T^{m_9} * e^{m_2} * e^{m_4/\varepsilon} * (1 + \varepsilon)^{m_5 T} * e^{m_7 \varepsilon} * \dot{\varepsilon}^{m_3} * \dot{\varepsilon}^{m_8 T} & & (c) \end{cases} \quad (4.43)$$

Pour les deux premières équations de (4.43), K_0 est une consistance de référence, $\bar{\varepsilon}$ la déformation équivalente, ε_0 le terme de régulation de l'écrouissage, n le coefficient de sensibilité à l'écrouissage, β le coefficient de sensibilité à la température. La troisième expression (4.43.c) est celle du déviateur des contraintes pour la loi de type Hensel-Spittel.

4.2.1.2 Variables thermiques dépendant de la résolution mécanique

Le problème mécanique va, à son tour, influencer la modélisation thermique : de la chaleur sera générée par déformation du lopin et par frottement.

- Principalement, la pièce subissant de grandes déformations au contact des outils de forgeage s'échauffe. C'est le terme source (4.44) qui prend en compte cette déformation.

$$\dot{w} = f_p \sigma : \dot{\varepsilon} \quad (4.44)$$

f_p représentant la fraction de puissance des déformations transformées en chaleur, généralement comprise entre 0,9 et 1.

- De plus, le frottement entre la pièce et les outils va aussi produire de la chaleur. Le flux de chaleur dû au frottement Φ_{frott} sera pris en compte au niveau des conditions aux limites thermiques avec :

$$\Phi_{frott} = \frac{b_m}{b_m + b_{out}} \tau(\Delta\nu_g) \cdot \Delta\nu_g \quad (4.45)$$

où $b_m = \sqrt{k_m \rho_m c_m}$ est l'effusivité du matériau et b_{out} celle l'effusivité de l'outil et $\Delta\nu_g$ la vitesse de glissement à l'interface. Pour caractériser les conditions aux limites sur les faces en contact, nous avons vu au premier chapitre qu'il faut utiliser la formule ci-dessous :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = h_{cd} (T - T_{out}) - \frac{b_m}{b_m + b_{out}} \alpha K \|\Delta\nu_g\|^{p+1} \quad (4.46)$$

4.2.1.3 Problème thermomécanique lié à la simulation numérique du procédé de forgeage à chaud

D'après les équations mécaniques, le couplage avec la thermique apparaît dans l'expression de la consistance K tandis que le couplage avec la mécanique apparaît dans l'équation de la chaleur par l'énergie de déformation et dans les conditions aux limites sur les faces en contact par la présence de la vitesse de glissement. Le problème thermomécanique se synthétise de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(\sigma) = \text{div}(s) - \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \quad \text{équation d'équilibre} \\ \text{div}(v) = 0 & \text{équation d'incompressibilité} \\ s = 2K \left[\sqrt{3} \dot{\varepsilon} \right]^{m-1} \dot{\varepsilon} & \text{loi de comportement de Norton-Hoff} \\ K(T, \bar{\varepsilon}) = K_0 (\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^n e^{\beta/T} & \text{loi thermoécrouissable} \\ \sigma \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_l & \text{surfaces libres} \\ (v - v_{out}) \cdot n \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c & \text{contact unilatéral} \\ \tau = -\alpha_f K \|\Delta\nu_g\|^{q-1} \Delta\nu_g \quad \text{sur } \Gamma_c & \text{loi de frottement de Norton} \end{array} \right. & (4.47) \\ \left\{ \begin{array}{ll} \rho c \frac{dT}{dt} - \text{div } \vec{q} = \dot{w} \quad \text{et} \quad \dot{w} = f_p \sigma : \dot{\varepsilon} & \text{équation de la chaleur} \\ \vec{q} = -k \vec{\nabla} T & \text{loi de Fourier} \\ T(x, 0) = T_0 & \text{condition initiale} \\ \vec{q} \cdot \vec{n} = h_{cd} (T - T_{out}) - \frac{b_m}{b_m + b_{out}} \alpha K \|\Delta\nu_g\|^{p+1} \quad \text{sur } \Gamma_c & \text{condition de conduction} \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{q} \cdot \vec{n} = h (T - T_{ext}) \\ h = h_{cv} + h_r \\ h_r = \epsilon_r \sigma_r (T + T_{ext}) (T^2 + T_{ext}^2) \end{array} \right. & \text{sur } \Gamma_l \quad \text{condition de conv/ryt} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

4.2.2 Couplage thermomécanique

Lors de la résolution numérique des problèmes thermomécaniques, on s'appuie généralement sur le même maillage en vue de discrétiser le problème mécanique et le problème thermique.

A chaque incrément de temps, la température (ou température/flux dans le cas de notre formulation Mixte thermique) et la vitesse/pression sont les inconnues du problème thermomécanique que nous souhaitons résoudre. Cependant, le problème ne peut pas être résolu globalement et simultanément en grande partie à cause de la taille des matrices à résoudre et du conditionnement des matrices.

Le couplage retenu est un couplage faible incrémental entre la résolution mécanique et thermique. Cela signifie que les systèmes mécanique et thermique se résolvent indépendamment et de façon séquentielle, de manière à ne remettre à jour qu'un certain nombre de variables. Par conséquent, lors de la résolution de ce problème couplé, aucune itération de convergence n'est effectuée à la fin de chaque résolution thermomécanique incrémentale. La figure 4.4 synthétise cet algorithme de couplage.

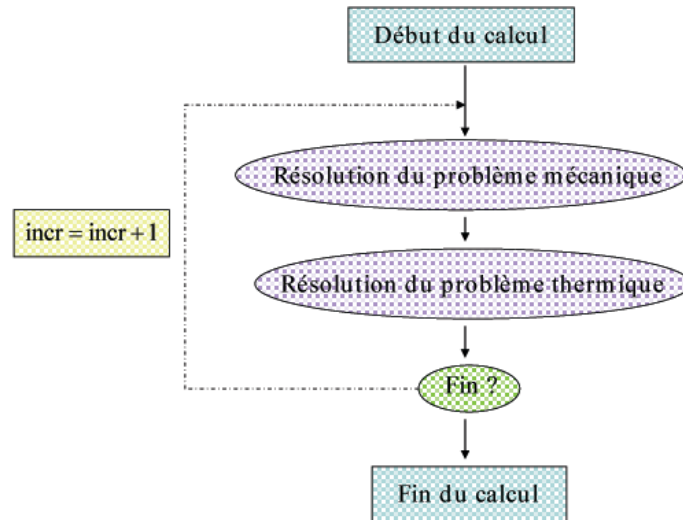


FIG. 4.4 – Couplage thermomécanique [Terzolo 2004].

Plus précisément, on considère la résolution du premier bloc mécanique en utilisant le bloc thermique de l'incrément précédent avec le découplage suivant :

$$P(v, p, T) = \begin{cases} P_1(v, p)_T = 0 \\ P_2(T)_{v, p} = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Le même pas de temps est utilisé pour les deux problèmes P_1 et P_2 . La thermique est donc calculée avec un incrément de retard par rapport au champ de vitesse et de pression [Aliaga 2000].

Toutefois, il est possible d'utiliser des pas de temps différents pour résoudre les problèmes mécanique et thermique, à l'aide de la désynchronisation du pas de temps thermique. En utilisant l'approche GS combinée à la thermique asynchrone lors de la résolution du problème thermique, le pas de temps thermique optimal calculé est souvent différent du pas de temps mécanique choisi arbitrairement. Ainsi, à la fin du calcul thermique, ce pas de temps optimal est réajusté par linéarisation sur celui mécanique.

4.3 Simulations numériques : cas de forgeage

Après avoir rappelé le problème mécanique et établi les caractéristiques du couplage thermomécanique pour le procédé de forgeage à chaud, nous présentons, dans cette dernière partie, plusieurs simulations numériques relatives à ce procédé.

Avant d'introduire la déformation (en activant le terme du travail mécanique), un dernier cas analytique est évoqué : c'est la diffusion thermique d'un cube entre deux outils. Suivra ensuite une compression académique d'un cylindre, avec l'étude préliminaire d'une déformation purement mécanique (sans frottement ni transfert thermique) afin de s'assurer que le terme source \dot{w} (faisant apparaître le phénomène d'auto-échauffement dans la pièce) est correctement pris en compte, puis le rajout des échanges thermiques et du frottement. Enfin, nous terminerons par un cas industriel avec la compression du triaxe.

Pour toutes ces simulations, la formulation Mixte continue P_1/P_1 en T/\vec{q} et la formulation mixte P_1^+/P_1 en \vec{v}/p sont choisies afin de résoudre le problème thermomécanique.

4.3.1 Diffusion d'un cube entre deux outils plans

4.3.1.1 Exemple d'applications : cas de double conduction à chaud

On considère un cube en acier (données du matériau p 63) de 10mm de côté (soit d'épaisseur $e = 5\text{mm}$). Cette pièce, initialement à la température $T_0 = 1000^\circ\text{C}$ est en contact entre deux outils maintenus à la température $T_{out} = 500^\circ\text{C}$ (figure 4.5). Le coefficient de transfert de conduction entre le cube et les outils reste fixé à $\alpha_{out} = 4000\text{W/m}^\circ\text{K}$.

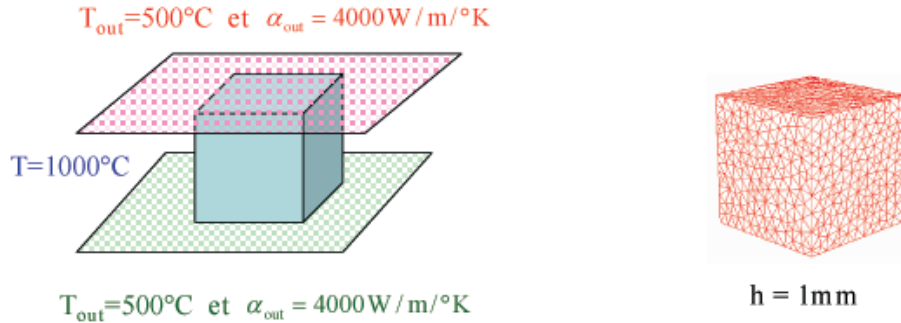


FIG. 4.5 – Test de double conduction à chaud.

On va donc se retrouver dans la configuration du refroidissement d'un cube d'épaisseur $2e = 10\text{mm}$ (on se place suivant l'axe z) avec des conditions conductives en parois (le cube étant en contact avec deux outils plans). On parle alors de test double conduction à chaud quand la pièce initialement chaude est contact avec deux outils froids et inversement de test de double conduction à froid quand la pièce est froide et les outils chauds.

Afin de suivre le refroidissement dans ce cube, plusieurs capteurs sont positionnés, comme le suggère le tableau 4.1.

	Temp 1	Temp 2	Temp 3	Temp 4	Temp 5
Position (x,y,z)	(5,5,0)	(5,5,1)	(5,5,5)	(5,5,9)	(5,5,10)

TAB. 4.1 – Coordonnées des cinq capteurs.

La simulation numérique servant ici de référence possède les caractéristiques suivantes :

- le temps de simulation est de 30s, avec un pas de temps Δt fixé à 0,5s ,
- la taille de maille h du cube est de 1mm, avec 11601 éléments et 2400 noeuds,
- une condition adiabatique est supposée sur l'ensemble des faces libres du cube.

4.3.1.2 Solution analytique

Ce cas de double conduction peut se ramener à un cas de diffusion entre plaques parallèles d'épaisseur finie e , avec des conditions convectives en parois : on note par T_f la température du fluide de refroidissement loin de la plaque et par α le coefficient de transfert. Ainsi, les conditions convectives s'écrivent :

$$z = \pm e : -k \frac{\partial T(t)}{\partial z} = \alpha [T(t) - T_f(t)] \quad (4.49)$$

Compte tenu de la condition initiale ($T = T_0$ à $t = 0$ en tous points de la plaque) et de ces deux conditions aux limites (4.49), l'équation de la chaleur se résout analytiquement, sous la forme d'une série :

$$\frac{T(z,t) - T_f}{T_0 - T_f} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4 \sin(M_n)}{2M_n + \sin(2M_n)} \right] e^{-\left(M_n^2 \frac{at}{e^2}\right)} \cos\left(\frac{M_n z}{e}\right) \quad (4.50)$$

où M_n est la $n^{\text{ème}}$ racine positive de l'équation :

$$M_n \tan(M_n) = \frac{\alpha e}{k} \quad (4.51)$$

4.3.1.3 Présentation des résultats numériques

L'ensemble de ces données va donc contribuer à l'apparition d'un double refroidissement dans le cube. Ce refroidissement est mis en évidence à la fois sur la figure 4.6 représentant, à plusieurs instant de la résolution thermique Mixte, les isovaleurs de la température et sur la figure 4.7 étudiant le comportement de la température en fonction de l'épaisseur e de la pièce, à un temps donné.

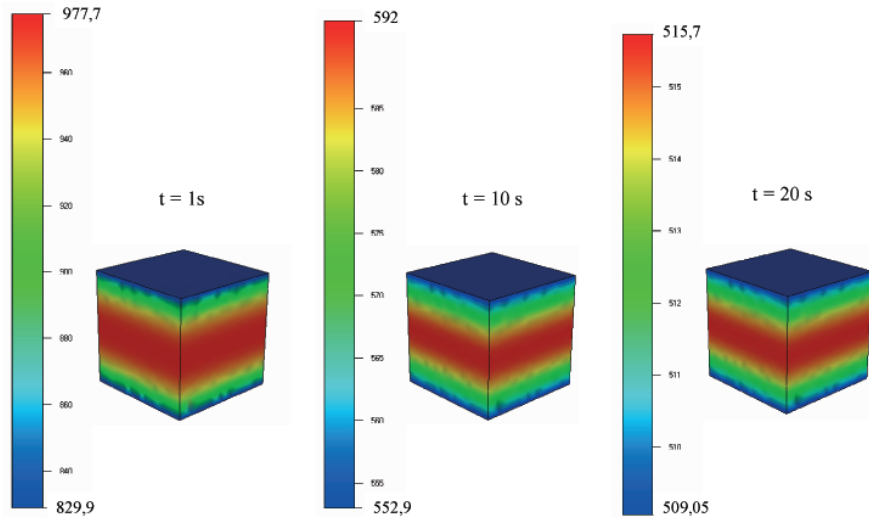


FIG. 4.6 – Isovaleurs de la température avec une résolution thermique Mixte P_1/P_1 .

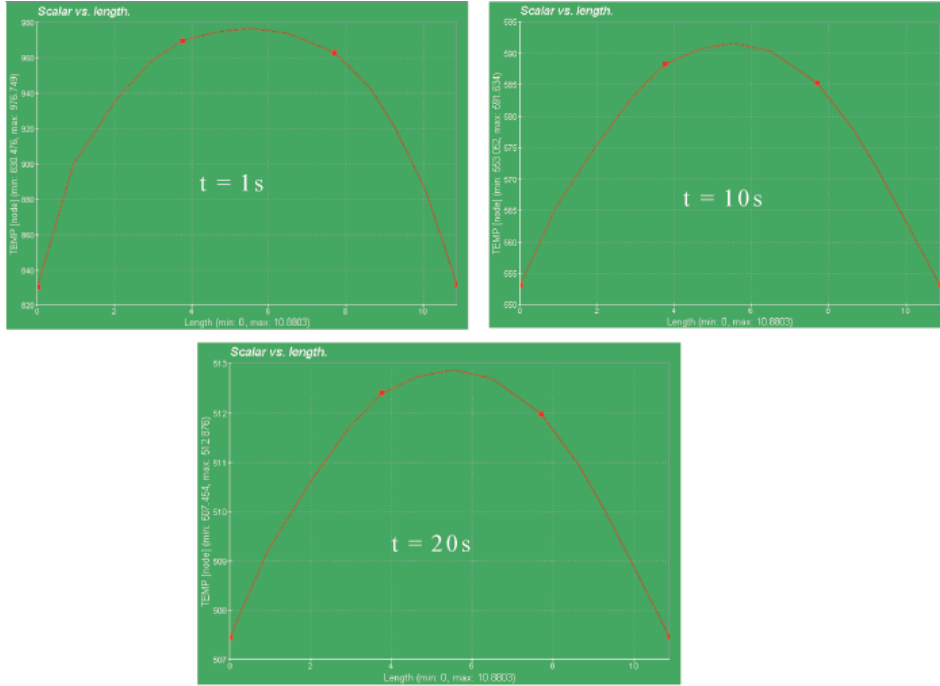


FIG. 4.7 – Tracé de la température "Mixte" en fonction de la profondeur e : au bout d'une seconde (en haut à gauche), de 10s (en haut à droite) et de 20s (en bas).

En traçant l'évolution au cours du temps de la température "Mixte" pour les cinq capteurs (figure 4.8), une excellente symétrie est aussi constatée et l'équilibre thermique (à 500°C) est quasiment atteint au bout des 20s de simulation.

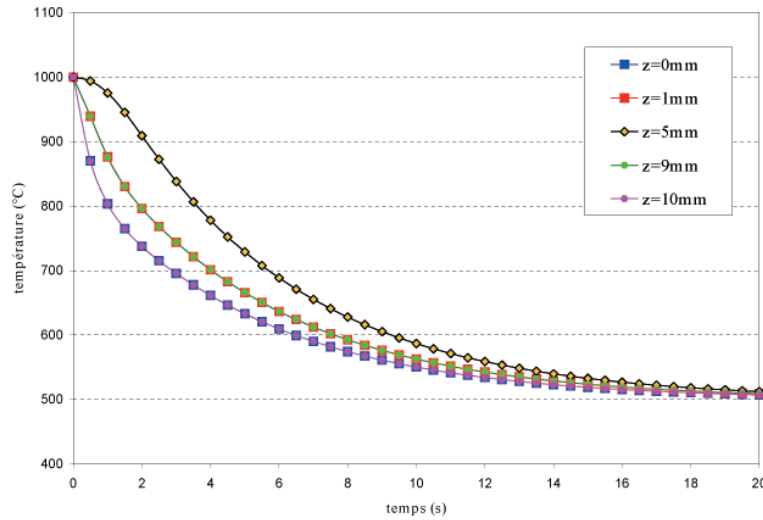


FIG. 4.8 – Evolution de la température avec une résolution thermique Mixte P_1/P_1 .

Connaissant la solution analytique (4.50), on se propose de définir la solution numérique la plus pertinente pour ce test de double conduction en comparant les quatre modèles de la résolution thermique (l'approche Galerkin standard asynchrone, le schéma TGD, le modèle Gdimp et la formulation Mixte continue P_1).

Pour chacun des traceurs (temp1, temp2 et temp3), nous représentons sur les figures 4.9(a), 4.9(b) et 4.9(c) l'évolution thermique au cours du temps des divers modèles et la solution analytique. Il s'avère que la formulation Mixte P_1 est la plus précise (les écarts avec l'analytique sont

les plus faibles) et que ses courbes coïncident parfaitement avec les courbes GS asynchrone. Par contre, c'est le TGD qui donne la moins bonne estimation de la température, avec un refroidissement un peu trop rapide et des courbes les plus éloignées de la solution exacte.

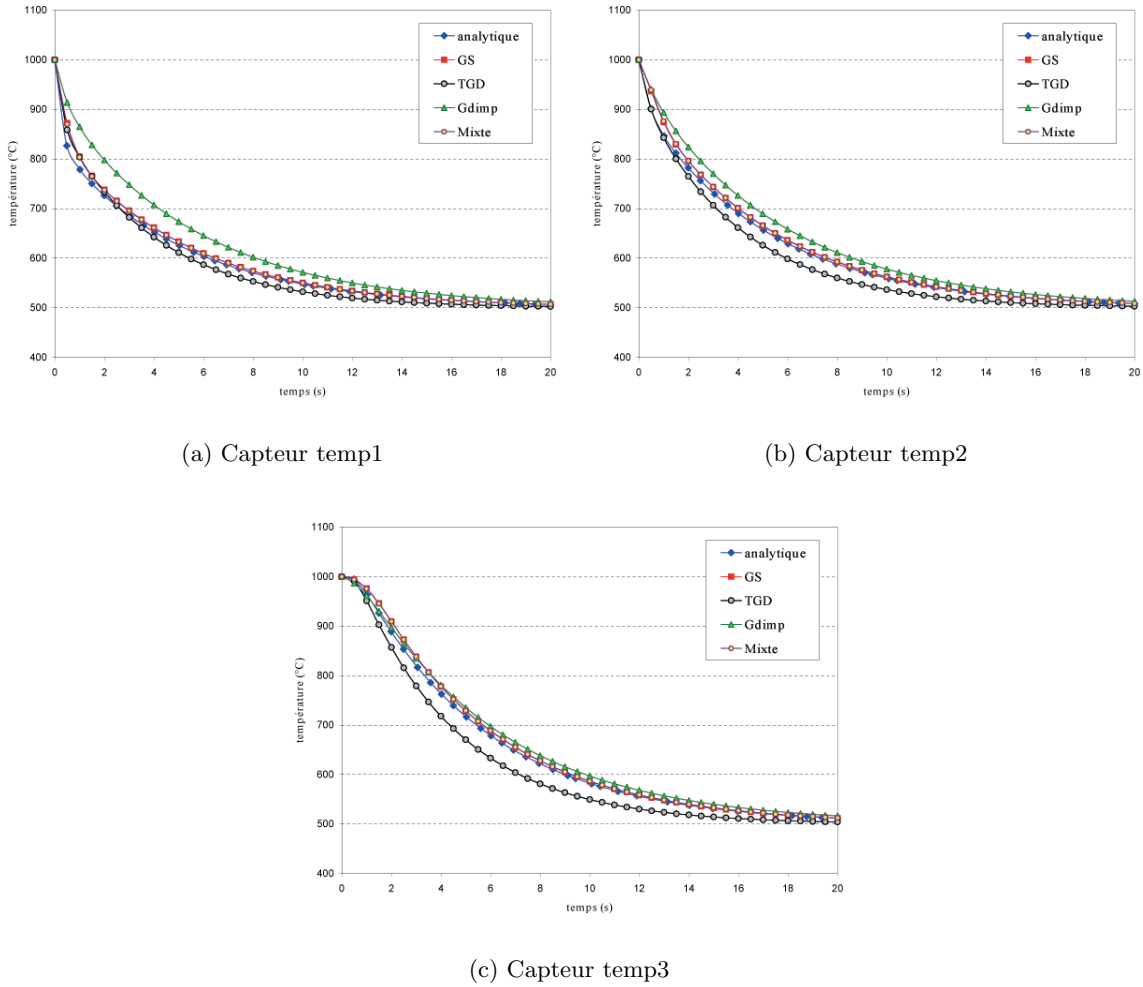


FIG. 4.9 – Comparaison entre la solution analytique et les divers modèles numériques.

En temps de calculs, l'approche GS asynchrone est la plus rapide (2 min 36 s), devant le modèle Gdimp (4 min 30 s), la formulation Mixte (6 min 30 s) et le schéma TGD (30 min).

Remarque 4.5 En considérant un pas de temps dt plus petit, de l'ordre de 0,01s, la condition de profondeur de pénétration n'est plus satisfaite avec la résolution Mixte continue, faisant ainsi apparaître un réchauffement anormal sur la première couche des éléments de la triangulation (figure 4.10), pendant les premiers incréments. Les deux modèles numériques discontinus sont, quant à eux, plus robustes, sans l'apparition d'aucun phénomène non physique dès 0,01s.

4.3.1.4 Synthèse des quatre modèles thermiques

A la vue de ces résultats, la formulation Mixte continue P_1 est concluante sur le test de double conduction à chaud, avec une excellente précision et des temps de calculs acceptables. Des résultats analogues sont également obtenus en considérant un test de double conduction à froid (température du cube à 500°C et celles des outils à 1000°C).

En ce qui concerne les modèles Galerkin discontinus, ils sont incontestablement les plus robustes en absorbant les chocs thermiques avec n'importe quelle mise en données; ce qui n'est

pas le cas de la formulation Mixte quand les conditions de stabilité (entre le pas de temps et le pas d'espace) ne sont plus respectées. Dans ce cas, on pourrait envisager le couplage sur les premiers instants de la simulation entre le modèle Gdimp et la formulation mixte. Le modèle Gdimp serait plus conseillé que le schéma TGD en donnant une estimation plus précise du champ de température et un gain de temps de résolution non négligeable.

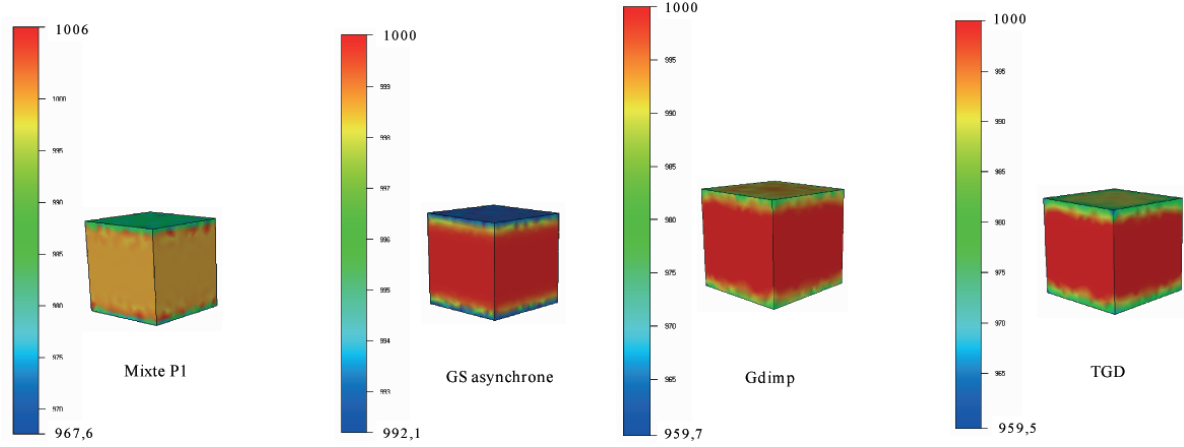


FIG. 4.10 – Isovaleurs de la température avec les quatre modèles de résolution thermique à l'instant $dt = 0,01s$ et $h = 1mm$.

4.3.2 Test académique : compression de cylindre (Aubert & Duval)

C'est la société Aubert & Duval qui nous a proposé ce cas de validation, en simulant la compression d'un quart de cylindre. C'est un cas relativement simple avec la déformation d'une pièce cylindrique.

Les industriels ont effectué un certain nombre d'essais expérimentaux afin d'établir une loi rhéologique mécanique et un modèle thermique (cf Annexe D). Ce modèle thermomécanique a par la suite été validé en simulant la compression du quart de cylindre avec le logiciel bidimensionnel Forge 2[®]. Une fois la validation faite avec ce code 2D, les ingénieurs Aubert & Duval ont naturellement voulu tester le modèle thermomécanique sur la version tridimensionnelle du logiciel. Malheureusement ils se sont heurtés, lors de l'étude thermique, à des résultats non cohérents entre les deux logiciels Forge 2[®] et Forge 3[®].

En partant du principe que Forge 2[®] a été validé expérimentalement, nous avons voulu comprendre d'où venait l'écart obtenu, par Aubert & Duval, entre Forge 2[®] et Forge 3[®].

4.3.2.1 Mise en données

Le cylindre fait 100 mm de hauteur et 50 mm de rayon. Pour alléger les calculs, seulement un quart du cylindre sera considéré (figure 4.11). Placé entre deux outils plats maintenus à 400°C , le cylindre est initialement à la température de 980°C . L'outil supérieur comprime de moitié la pièce (à la vitesse de 7 mm/s) tandis que l'outil inférieur reste fixé. Des échanges thermiques vont donc se produire entre la pièce et les outils, avec un coefficient de conduction h_{out} de 2000 W/m/K . On suppose aussi des échanges thermiques avec l'air : température ambiante $T_{ext} = 50^\circ\text{C}$ et $h = 10\text{ W/m/K}$.

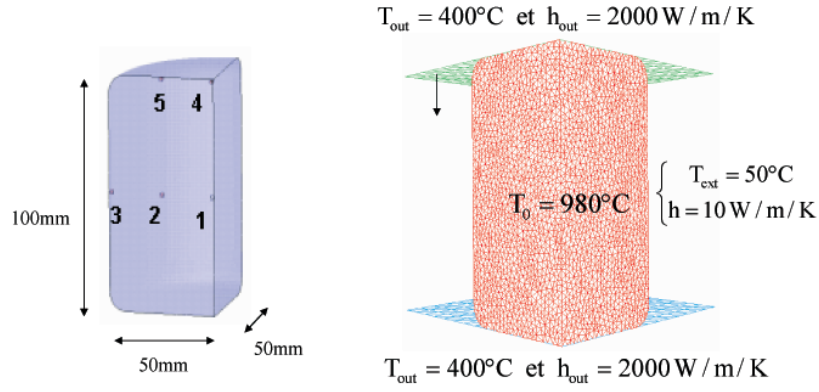


FIG. 4.11 – Compression d'un quart d'un cylindre : à gauche les dimensions, à droite les conditions de la simulation.

Une rhéologie point à point (loi de Norton-Hoff, type thermo-écrouissable) et un modèle thermique point à point (cf Annexe E) ont été utilisés. Pour le frottement, c'est la loi de Tresca (4.22) qui est retenue avec $\bar{m} = 0,3$. Enfin, le cylindre est maillé finement, avec une taille de maille h de $2,5\text{mm}$ et des boîtes de maillage plus fine (1mm), soit 400 000 éléments au départ pour un maillage Forge3[®] (figure 4.12).

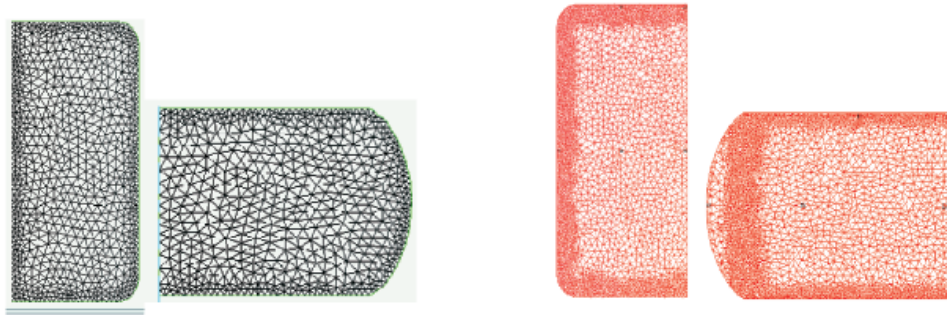


FIG. 4.12 – Maillage du quart de cylindre avec $h = 2,5\text{mm}$: à gauche le maillage 2D de Forge2[®] avec l'activation d'un raffinement sur le bord, à droite le maillage 3D de Forge3[®].

Pour décrire correctement les divers phénomènes de transferts thermiques, plusieurs capteurs virtuels sont positionnés dans le cylindre (figure 4.11) :

- Le capteur 1, placé au centre de la pièce, s'intéresse au phénomène d'auto-échauffement dégagé lors de la compression. Plus précisément, à l'évolution du terme source $\dot{\omega}$ intervenant dans l'équation de la chaleur (1.10).
- Le capteur 2, un peu plus éloigné du centre du cylindre et donc du capteur 1 est également concerné par l'auto-échauffement.
- Le capteur 3, situé sur la surface latérale cylindrique, étudie la phénomène de convection/rayonnement.
- Les capteurs 4 et 5, directement en contact sur l'interface entre la pièce et l'outil supérieur, sont confrontés au frottement et aux transferts thermiques conductifs.

4.3.2.2 Résultats numériques

a) Obtenus par Aubert & Duval

La figure 4.13 représente les évolutions thermiques de ces différents capteurs obtenues par Aubert & Duval, avec les versions 3.0 de Forge2[®] et 6.2 de Forge3[®]. On se rend compte que le phénomène d'auto-échauffement est plus accentué avec le code Forge2[®] qu'avec Forge3[®] (capteurs 1 et 2) et, qu'en revanche, le refroidissement du cylindre au niveau de la zone de contact est plus rapide avec Forge2[®] qu'avec Forge3[®] (capteurs 4 et 5). Le rayonnement, quant à lui, est aussi bien pris en compte par les deux codes (capteur 3).

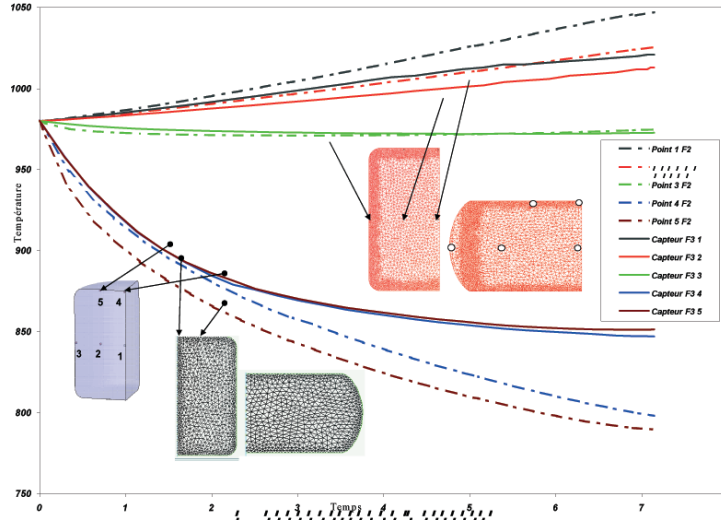


FIG. 4.13 – Résultats d'Aubert & Duval : comparaison entre la résolution thermique de Forge2[®] (pointillés) et celle de Forge3[®] (traits pleins).

b) Obtenus par le Cemef avec la version standard de Forge3[®]

Avant de comparer ces résultats avec ceux obtenus avec la résolution thermique Mixte P_1/P_1 du code Forge3[®], on se propose de comprendre l'écart obtenu entre la version bidimensionnelle et tridimensionnelle du logiciel. Il est important de mentionner qu'il est difficile d'établir une comparaison précise et efficace entre ces deux logiciels avec l'obtention plus que délicate de maillages compatibles entre le 2D et le 3D.

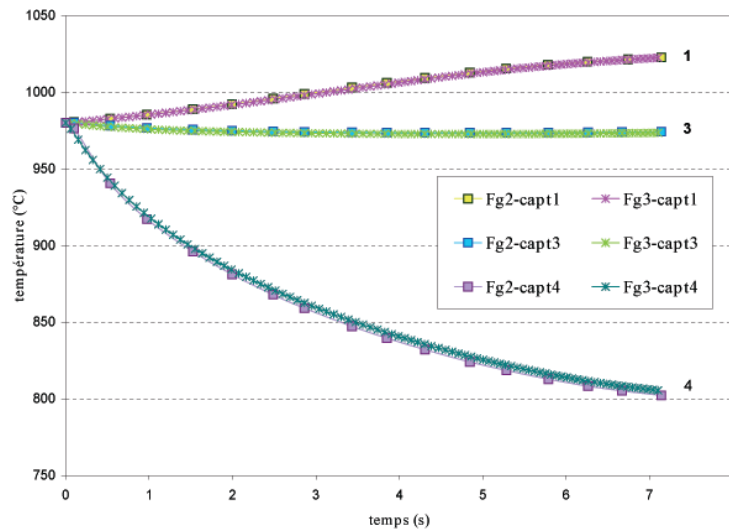


FIG. 4.14 – Résultats Cemef pour la résolution thermique de Forge2[®] et de Forge3[®].

Cependant, nous avons refait ce cas test au laboratoire avec les mêmes versions de Forge 2[®] et de Forge 3[®] et avec les mêmes données. Les résultats obtenus, présentés sur les figures 4.14 et 4.15 ne sont pas en accord avec ceux fournis par Aubert & Duval; ce qui est déjà plus rassurant et remet donc en question la fiabilité des résultats des industriels, provenant sans doute d'une mauvaise manipulation lors de la simulation de ce cas.

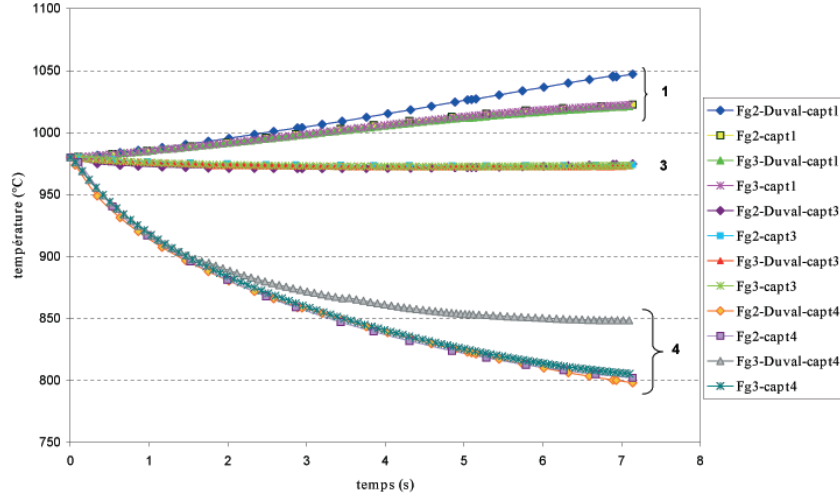
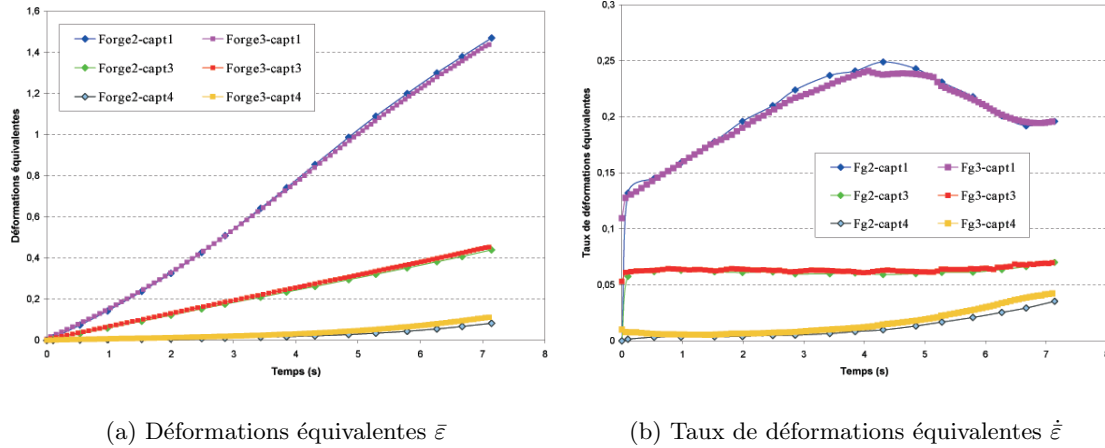


FIG. 4.15 – Comparaison de tous les résultats : évolution thermique des trois capteurs.

D'un point de vue de la résolution mécanique, nous en arrivons à la même conclusion, en nous intéressant à l'évolution des déformations équivalentes $\bar{\epsilon}$ (figure 4.16(a)), à celle du taux de déformations équivalentes $\dot{\bar{\epsilon}}$ (figure 4.16(b)) ou encore à celle des contraintes équivalentes $\bar{\sigma}$ (figure 4.17) : les courbes "mécaniques" obtenues avec les codes Forge 2[®] et Forge 3[®] coïncident.



(a) Déformations équivalentes $\bar{\epsilon}$

(b) Taux de déformations équivalentes $\dot{\bar{\epsilon}}$

FIG. 4.16 – Résultats Cemef pour la résolution mécanique de Forge 2[®] et de Forge 3[®].

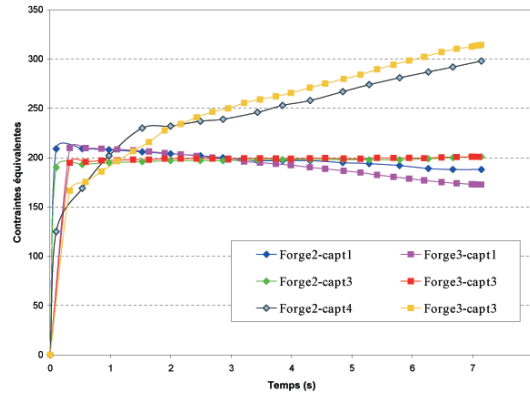
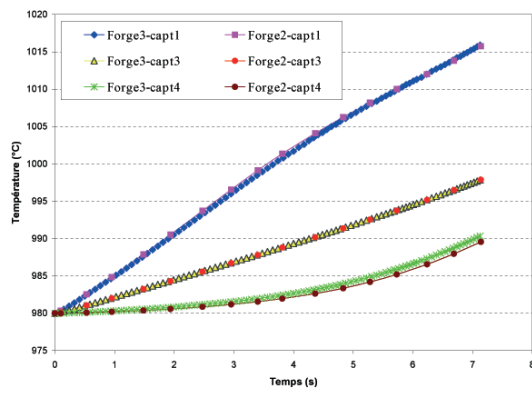
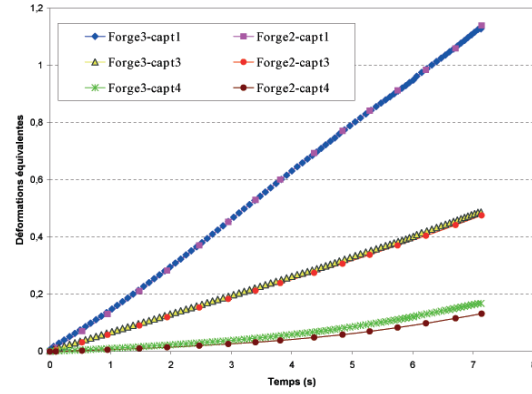


FIG. 4.17 – Résultats Cemef: comparaison des contraintes équivalentes $\bar{\sigma}$ Forge2[®] et Forge3[®].

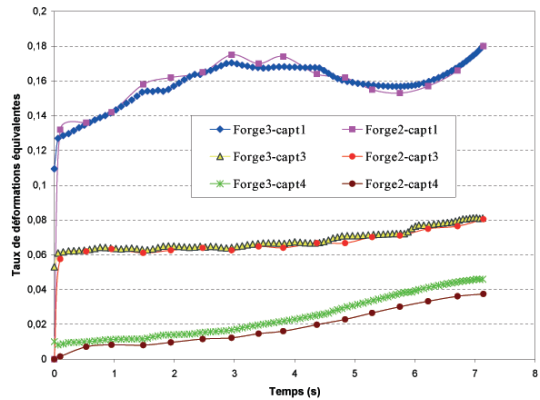
Remarque 4.6 Pour confirmer l'hypothèse d'une mauvaise manipulation, nous nous intéressons à la compression du cylindre sans aucun transfert thermique ni frottement (cas anisotherme). Là encore, la similitude des deux logiciels est observée sur les figures 4.18(a)-4.18(d), en représentant successivement les évolutions thermiques puis celles des déformations et des contraintes équivalentes.



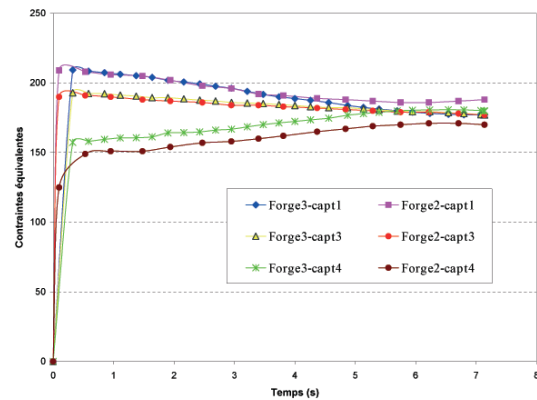
(a) Température



(b) Déformations équivalentes $\bar{\varepsilon}$



(c) Taux de déformations équivalentes $\dot{\varepsilon}$



(d) Contraintes équivalentes $\bar{\sigma}$

FIG. 4.18 – Cas anisotherme: résultats Cemef pour la résolution thermomécanique de Forge2[®] et de Forge3[®].

Remarque 4.7 *A la vue de la bonne concordance des résultats, nous simplifions la suite des évaluations pour ce test en optant pour un modèle thermique et une loi mécanique "constantes" :*

- * une loi de comportement Norton-Hoff (4.14) avec $K = 135,25$ et $m = 0,1162$
- * et des données du matériau constantes (cf tableau 4.2).

Conductivité k	Masse volumique ρ	Capacité c
$25,6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	7870 Kg.m^{-3}	$651 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

TAB. 4.2 – Données du matériau.

4.3.2.3 Validation de la formulation Mixte continue

Nous testons la formulation Mixte continue dans deux configurations "mécaniques" :

- le cas d'une compression anisotherme, sans échange thermique (coefficients de transferts thermiques conductifs h_{cd} et convectifs h nuls) ni frottement (coefficient de frottement de Tresca $\bar{m} = 0$), afin d'étudier seulement le phénomène d'auto-échauffement qui se produit au cours de la compression.
- le cas de compression avec la considération du frottement ($\bar{m} = 0,3$) et des divers transferts thermiques entre la pièce et les outils ($h_{cd} \neq 0$) et entre la pièce et l'air ($h \neq 0$).

a) Cas anisotherme

Puisqu'on supprime le frottement et les échanges thermiques, on peut se restreindre à l'étude de l'évolution thermique du capteur 1 au coeur de la pièce.

La figure 4.19 met en évidence l'auto-échauffement se dégageant au fur et à mesure de la compression du cylindre.

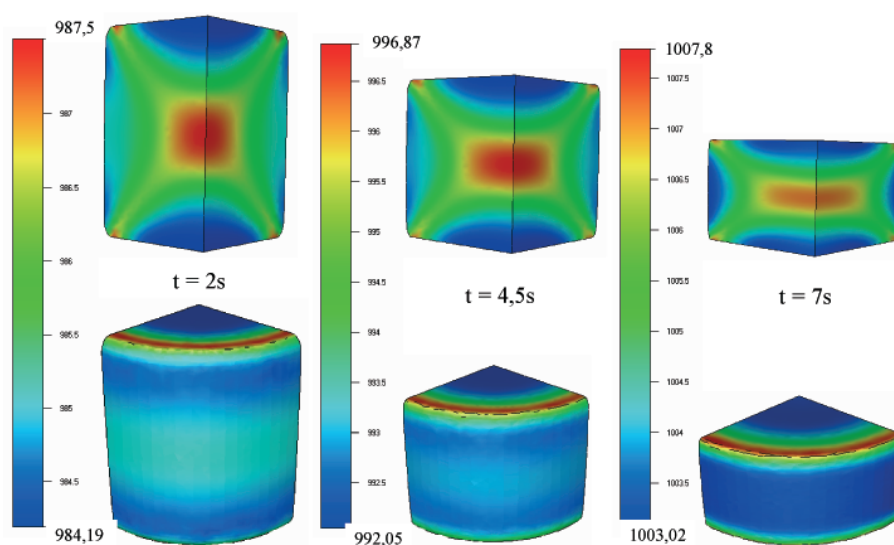


FIG. 4.19 – Isovaleurs de la température "Mixte": mise en évidence du phénomène d'auto-échauffement (croix du forgeron).

Dans le cas anisotherme, une solution analytique peut se déduire de l'écriture simplifiée de l'équation de la chaleur :

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{w} &\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\dot{w}}{\rho c} \quad \text{avec} \quad \dot{w} = \sigma : \dot{\epsilon} \\ &\Leftrightarrow T(t + \Delta t) = T(t) + \Delta t \frac{\sigma : \dot{\epsilon}}{\rho c} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Cette solution analytique peut être comparée aux diverses solutions numériques GS asynchrone Forge2[®] et GS asynchrone Forge3[®] mais aussi à la solution découlant de la résolution thermique Mixte continue. Sur la figure 4.20, nous avons représenté ces quatre évolutions de la température pour le capteur 1, montrant ainsi la bonne concordance des différentes courbes et suggérant une estimation correcte du terme de chaleur \dot{w} par la formulation Mixte.

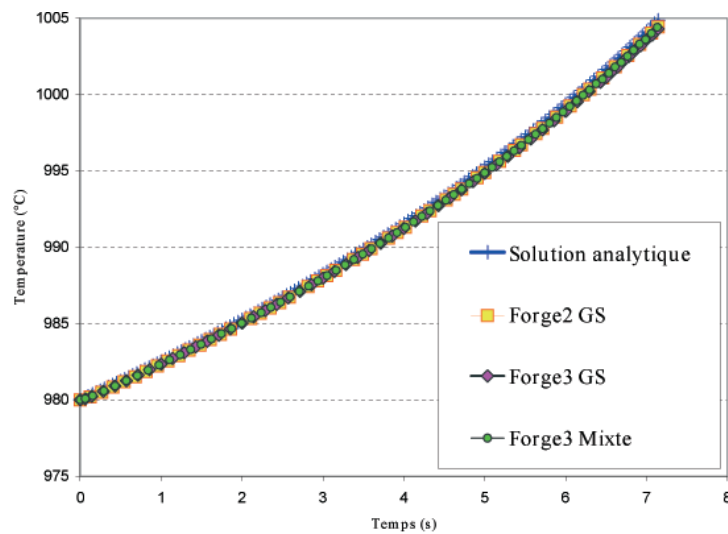


FIG. 4.20 – Cas anisotherme : évolution de la température du capteur 1.

b) Cas classique de compression

On tient compte à présent du frottement et des diverses échanges thermiques entre le cylindre et les outils et entre le cylindre et l'air. Ces phénomènes thermiques sont clairement mis

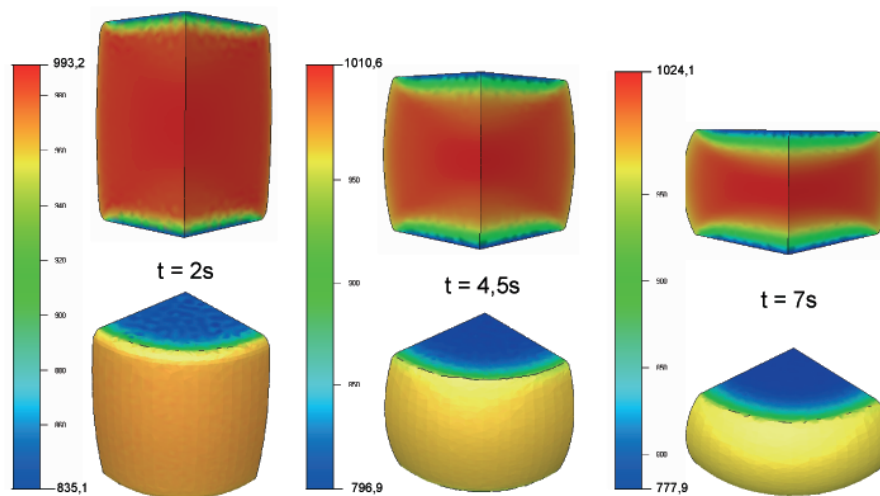


FIG. 4.21 – Isovaleurs de la température avec une résolution Mixte P_1 .

en évidence sur la figure 4.21 représentant les isovaleurs de la température du cylindre, pris à plusieurs instants de la déformation : l'auto-échauffement au coeur de la pièce, la diffusion thermique créée par le refroidissement de la pièce au contact avec les outils, et aussi avec l'air.

Comme en témoigne les évolutions thermiques de la figure 4.22, les résultats sont plus qu'encourageants avec les courbes provenant de la formulation Mixte qui sont sensiblement identiques aux courbes obtenues par une approche GS asynchrone de Forge 2[®] et de Forge 3[®], représentant toutes deux, ici, des solutions références en l'absence de solutions analytiques. La formulation Mixte décrit correctement le phénomène d'auto-échauffement (capteur 1), de conduction (capteur 4) et de convection/rayonnement (capteur 3).

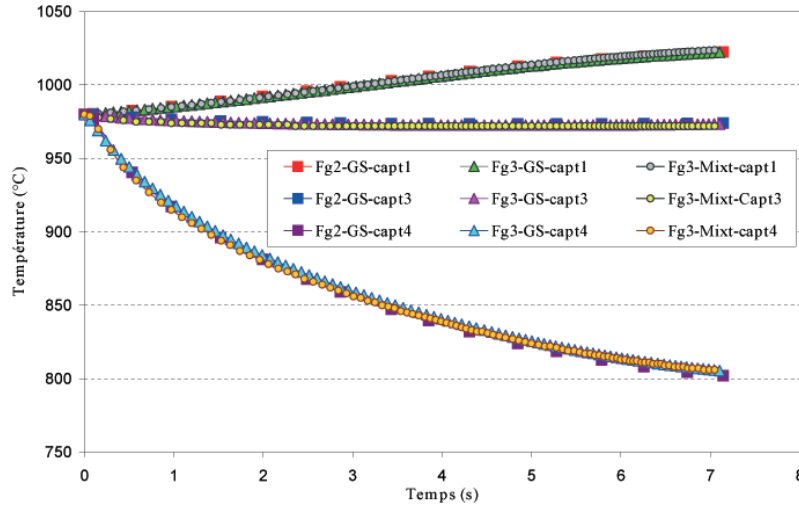


FIG. 4.22 – Evolution de la température des divers capteurs avec une résolution Mixte.

4.3.2.4 Conclusion

Malgré une erreur initiale commise par les industriels Aubert & Duval, ce premier cas de compression académique permet de s'assurer de l'efficacité de la formulation Mixte continue aussi bien dans un cas de déformation seule qu'avec la prise en compte du frottement et des échanges thermiques.

4.3.3 Compression du triaxe

Pour cette dernière validation, on se propose d'étudier un cas plus complexe, celui de la compression du triaxe, et plus exactement celle d'un sixième du triaxe. Comme on peut le voir sur la figure 4.23, nous avons d'une part la pièce cylindrique maillée finement près des outillages et, d'autre part la forme voulue (le triaxe) après déformation.

Les données de ce test sont synthétisées dans le tableau 4.3 ci-dessous.

Pour étudier le refroidissement du triaxe, nous positionnons deux capteurs virtuels (cf figure 4.23) : l'un au centre de la pièce (capteur 1), l'autre près de la zone de contact de l'outil supérieur (capteur2).

Comme précédemment, on étudie le cas anisotherme avant de rajouter les échanges thermiques et le frottement. Pour évaluer l'efficacité de la formulation Mixte continue, nous rajoutons les solutions numériques TGD, Gdimp en plus de la solution de référence Forge 3[®] GS asynchrone.

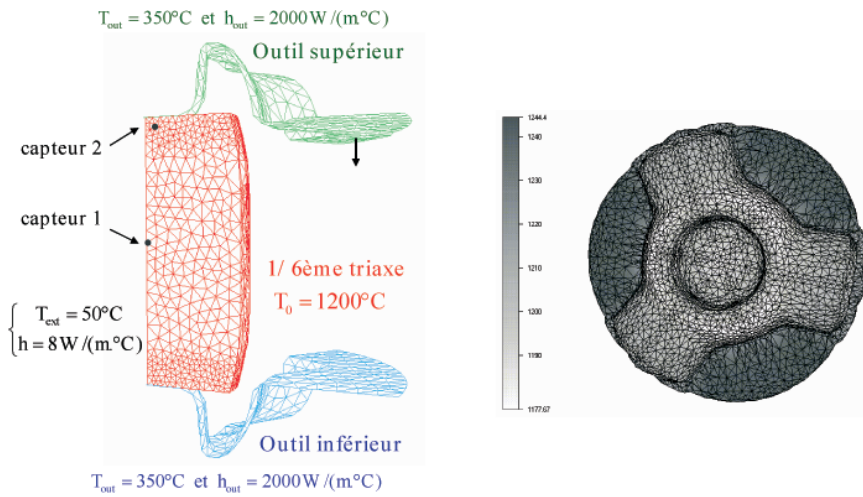


FIG. 4.23 – Simulation du triaxe : à gauche la pièce maillée initiale, à droite la pièce finale.

Mécanique	Thermique
Loi EVP thermoécrouissable (4.43.a) $\beta = 0,0025$, $n = 0,174$, $\varepsilon_0 = 0,0001$ $K = 1625000$ et $m = 0,139$ $E = 7.10^7$ et $\nu = 0,3$	Données du matériau $k = 27 \text{ W/m/K}$ $\rho = 7500 \text{ Kg/m}^3$ $c = 669 \text{ J/Kg/K}$
loi de frottement de Coulomb $\bar{m} = 0,4$ $\mu = 0,4$	$T_0 = 1200^\circ\text{C}$ $T_{out} = 350^\circ\text{C}$ et $h_{out} = 2000 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$ $T_{ext} = 50^\circ\text{C}$ et $h_{out} = 8 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$

TAB. 4.3 – Mise en données du cas de compression du triaxe.

4.3.3.1 Cas anisotherme

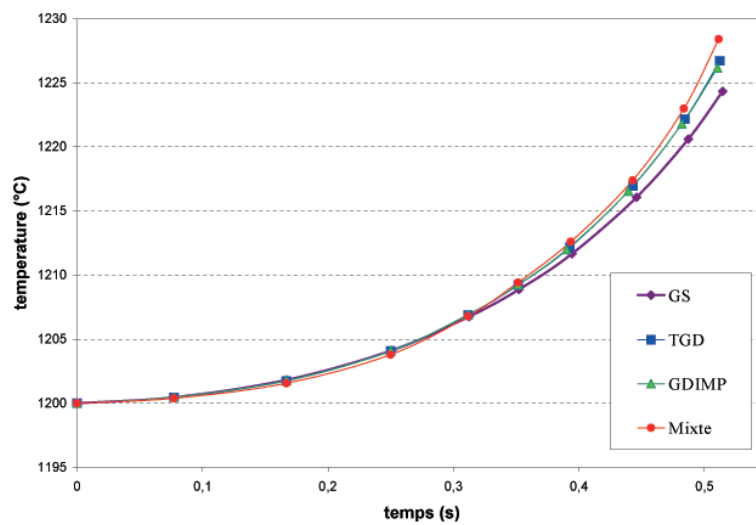


FIG. 4.24 – Cas anisotherme : évolutions thermiques au niveau du capteur 1.

Sur la figure 4.24, on se focalise sur l'évolution de la température du premier capteur virtuel. Une bonne concordance des résultats est observée en regardant les quatres courbes. En prenant pour référence la solution numérique Forge 3[®] GS, le terme d'auto-échauffement est correctement calculé avec les deux modèles discontinus et la formulation Mixte continue.

4.3.3.2 Cas de compression du triaxe

Lorsqu'on prend en compte le frottement et les divers transferts thermiques, on constate que les trois modèles (TGD, Gdimp et formulation Mixte) donnent de meilleurs résultats au coeur du triaxe qu'au niveau de l'interface de contact (cf figure 4.25) :

- Le TGD approxime convenablement la température au centre de la pièce. Par contre, près des outils, l'estimation de la température est d'une moins bonne précision avec un refroidissement plus prononcé, atteignant $\sim 30^\circ\text{C}$.
- L'estimation de la température est un peu plus pertinente avec le modèle Gdimp mais perd légèrement de sa précision au coeur de la pièce.
- Pour les zones de chocs thermiques, il est donc très intéressant d'avoir recours à ces techniques de résolution P_0 .
- La formulation Mixte reste cohérente à la solution de référence GS asynchrone pour les deux traceurs.

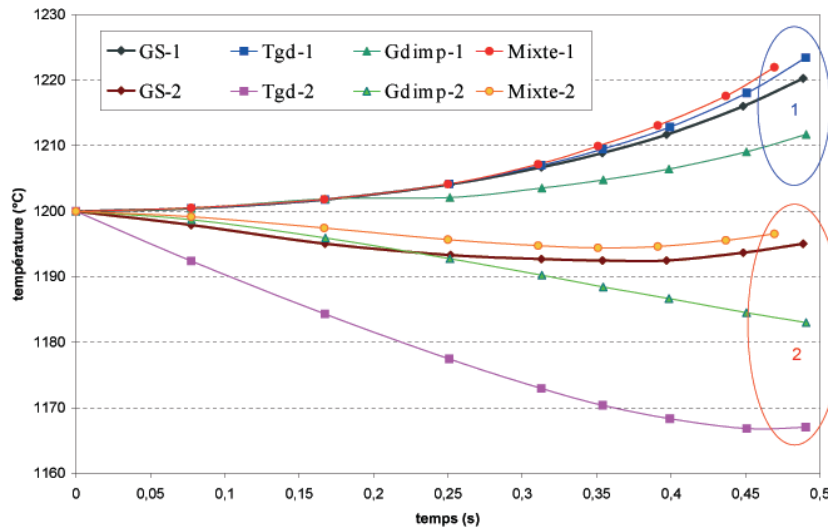


FIG. 4.25 – Evolution de la température pour les deux traceurs : comparaison des quatre modèles de résolution thermique de Forge 3[®].

Pour ce qui est des temps de simulation, ils sont du même ordre ($\simeq 30\text{ min}$) pour les quatre modèles thermiques. En fait, le temps de résolution thermique est infiniment petit (résolution d'un système linéaire par la méthode du gradient conjugué préconditionné) comparé à celui de la résolution mécanique (résolution d'un système non linéaire par la méthode de Newton-Raphson), quand il y a déformation de la pièce.

4.3.3.3 Conclusion

La formulation Mixte continue se révèle également pertinente sur ce deuxième cas de compression industriel, beaucoup plus complexe.

4.3.4 Bilan des validations thermomécaniques

Les nombreuses validations sur des cas analytiques puis les applications industrielles tridimensionnelles plus ou moins simples ont permis de mettre en évidence l'efficacité et la robustesse de la formulation mixte continue pour la simulation de compression de lopin cylindrique (à fortiori des procédés de forgeage), avec notamment une gestion plus qu'encourageante du terme source \dot{w} à l'origine de l'auto-échauffement et du couplage thermomécanique et avec la prise en compte du frottement au niveau des zones de contacts pièce/outillages.

4.4 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous nous sommes penchés sur la description du problème mécanique relatif à la mise en forme des métaux par le procédé de forgeage à chaud, dans le but de mieux comprendre la nature du couplage thermomécanique, et à plus long terme, d'adapter la formulation Mixte continue et les deux modèles discontinus à la simulation des différentes étapes du processus de forgeage.

Le couplage retenu est un couplage faible entre la résolution mécanique et la résolution thermique sachant que ce couplage n'intervient que de deux manières : l'une par la thermodépendance de certaines variables mécaniques (comme la consistance du matériau intervenant dans la loi de comportement rhéologique) et l'autre par la chaleur créée/dissipée par déformation de la pièce initiale (terme source \dot{w}) et par frottement (ajout d'une condition aux limites à l'interface de contact pièce/outil).

Plusieurs simulations de compression ont été présentées afin d'évaluer la fiabilité de la formulation Mixte continue sur le procédé de forgeage à chaud. Un premier cas de double conduction à chaud (pièce chaude et outils froids) sans déformation a d'abord confirmé via une solution analytique que les transferts thermiques conductifs étaient parfaitement pris en compte avec les modèles discontinus et la formulation Mixte. On s'est ensuite intéressé à la compression simple d'un cylindre (sans puis avec échanges thermiques et frottement) pour valider la formulation Mixte continue [Pelissou- et al. 2004]. Enfin, un cas industriel a été présenté, celui de la compression d'un triaxe, montrant la robustesse de la formulation Mixte et laissant apparaître quelques difficultés pour les modèles discontinus au niveau des interfaces de contact pièce/outil [Pelissou-Massoni 2004].

Conclusion générale

Le travail que nous venons de présenter dans ce manuscrit s'articule autour de l'amélioration de la précision des calculs thermiques au cours de la simulation du procédé de forgeage à chaud, pour des pièces métalliques tridimensionnelles.

Au cours de cette étude, nous avons développé une formulation mixte originale qui permet de suivre aussi bien les évolutions de la température que celles du flux de chaleur, tout au long du processus de mise en forme des métaux, depuis le chauffage du lopin initial jusqu'au refroidissement de la pièce finie.

Pour réaliser ce travail, nous avons dû modifier le code de calculs Forge 3[®], essentiellement au niveau de la résolution 3D de l'équilibre thermique, en introduisant trois nouvelles techniques basées sur la méthode des éléments finis. Dans l'ordre chronologique, on s'est d'abord intéressé au schéma TGD explicite, puis au modèle implicite Gdimp et enfin à la formulation Mixte continue P_1/P_1 . Les principales difficultés qu'il a fallu résoudre au cours de ces trois dernières années sont :

- Basés sur la méthode de Galerkin Discontinue avec l'élément fini constant P_0 , le TGD et le Gdimp sont des modèles calculant le champ de température sur chaque élément de la triangulation (plus d'estimation nodale comme c'était le cas avec une approche Galerkin standard). Il a donc fallu en conséquence modifier les conditions aux limites thermiques au cas de forgeage, d'une part en les écrivant à l'aide des valeurs "élémentaires" et non plus à partir des valeurs nodales et, d'autre part en considérant la déformation de la pièce.
- Concernant la formulation Mixte continue utilisant l'élément mixte tétraédrique P_1/P_1 (avec par conséquent quatre inconnues par noeud : une pour la température et trois pour les composantes du flux) et un schéma temporel implicite, nous avons dû nous inspirer de la discrétisation spatiale EF du problème mixte mécanique en vitesse/pression ayant lui-même quatre degrés de liberté pour développer l'assemblage local puis global des diverses matrices de la formulation Mixte thermique, et ceci pour une meilleure compatibilité avec la version parallèle de Forge 3[®] monocorps.

Synthèse

• **Le chapitre 1** introduit la formulation classique du problème thermique instationnaire en température, composée de l'équation de la chaleur (combinée à la loi de Fourier), de conditions initiales et aux limites spécifiques aux échanges thermiques entre deux corps et avec un milieu extérieur. Ce chapitre met également en équations le problème thermique adapté à la simulation du procédé de forgeage.

La suite du chapitre est entièrement dédiée à la résolution numérique du problème thermique instationnaire en présentant diverses techniques ayant chacune leurs spécificités et leurs limitations :

- L’approche classique Galerkin Standard munie de l’élément fini linéaire tétraédrique P_1 est la plus utilisée. Cependant, des oscillations numériques non physiques se produisent lors du traitement de chocs thermiques. Afin de stabiliser ces chocs et respecter la condition de profondeur de pénétration, une technique de désynchronisation des pas de temps mécaniques et thermiques peut être combinée à la méthode de Galerkin en rajoutant de la diffusion : c’est la thermique asynchrone (actuellement utilisée dans le solveur thermique de Forge3[®] monocorps) qui se révèle efficace pour les problèmes faiblement non linéaires et tant que les chocs ne sont pas trop importants.
Basée sur la thermique asynchrone, la méthode de diffusion partitionnée semble mieux appropriée, notamment pour les problèmes fortement non linéaires, avec changement de phases (simulation du procédé de la coulée de métaux).
- Rajoutant un terme stabilisant à la formulation originelle de Galerkin qui s’apparente à de la diffusion artificielle, les méthodes stabilisées s’affranchissent des principales limitations de l’approche Galerkin pour le traitement plus général des problèmes de convection/diffusion. Malgré de bonnes propriétés de stabilité, on a vu qu’elles pouvaient entraîner des problèmes de consistance liés à la non symétrie du système linéaire résultant.
- Enfin, les méthodes de Taylor Galerkin et de Galerkin Discontinue ressortent comme étant les plus qualifiées pour notre étude du forgeage à chaud. Il a fallu pour cela introduire la formulation mixte en température et en flux de chaleur du problème thermique instationnaire et se baser sur les travaux de [Pichelin 1998] pour les combiner.

• **Le chapitre 2** est consacré à la formulation mixte à deux champs du problème thermique instationnaire, en conservant l’écriture distincte de l’équation de la chaleur et de la loi de Fourier. Nous avons vu que cette formulation en T/\vec{q} est mieux adaptée pour résoudre les problèmes de diffusion pure et qu’elle permet de mieux représenter les gradients, en imposant moins de dérivabilité aux champs inconnus. En vue de résoudre ce problème thermique, nous avons par la suite modifié deux modèles numériques, le schéma TGD (interpolation P_0/P_0 + développement Taylor explicite) et le modèle Gdimp (interpolation plus locale P_0/P_0^+ + schéma d’Euler implicite), pour qu’ils puissent s’adapter au procédé de forgeage.

En les validant sur des cas analytiques (purements thermiques), nous nous sommes aperçus qu’ils étaient mieux appropriés que l’approche Galerkin standard et très robustes en absorbant naturellement les chocs thermiques même particulièrement violents, avec cependant une meilleure précision et un temps de résolution plus court pour le modèle implicite. En effet :

- Les principales limitations du schéma TGD proviennent du choix de son schéma d’intégration temporelle à caractère explicite qui le contraint à prendre de petits pas de temps, faisant ainsi accroître les temps de calculs et de sa trop grande sensibilité au raffinement du maillage. D’autre part, une mauvaise estimation de la température découle du cas test en flux imposé.
- Le Gdimp est une amélioration du TGD avec une estimation plus précise du flux inconnu à l’aide d’une interpolation plus locale P_0^+ (et donc une estimation plus précise de la température) et en lui affectant un schéma d’Euler implicite qui lui confère une plus grande souplesse dans le choix du pas de temps (donc un modèle plus rapide).

• **Le chapitre 3** poursuit la résolution du problème thermique mixte instationnaire en introduisant le nouveau modèle proposé, la formulation Mixte continue P_1/P_1 . L’élaboration de notre formulation a d’abord été longuement évoquée avec l’écriture de toutes les équations constituant le problème faible et discret, l’utilisation de la méthode des éléments finis mixtes

(linéaires P_1), le choix du schéma d'intégration temporelle (le schéma Dupont implicite), une méthode de résolution itérative (la méthode de gradient conjugué préconditionné) et la gestion non triviale des conditions aux limites thermiques.

Cette formulation a ensuite été correctement validée sur une série d'applications simples munies de solutions analytiques et de solutions numériques (GS asynchrone, TGD et Gdimp). L'étude comparative résultante, sur des tests purement thermiques, a suggéré qu'elle était la plus fiable en offrant le meilleur compromis entre la précision et le temps de calculs. Cependant le jeu des paramètres de la simulation (données du maillage, du pas de temps mécanique, des conditions initiales et aux limites) doit rester cohérent pour éviter l'apparition d'oscillations non physiques en respectant les conditions de profondeur de pénétration.

- La résolution numérique du problème thermomécanique couplé fait l'objet du **dernier chapitre**: description de la formulation utilisée pour le cas du forgeage à chaud, résolution du problème mécanique mixte en vitesse/pression (P_1^+/P_1), analyse du couplage faible entre le problème mécanique et thermique, avec la prise en compte dans les équations thermiques des termes d'origine mécanique (source de chaleur et frottement) et vice-versa (écrouissage dépendant de la température).

Enfin, la validation de la formulation Mixte continue s'est poursuivie sur des cas académiques de forgeage et sur des applications industrielles, montrant notamment la gestion satisfaisante du phénomène d'auto-échauffement et de frottement au cours du processus de déformation de la pièce. Ces dernières simulations nous ont donc permis d'établir une estimation encourageante du champ de température, en tout point de la pièce. Toutefois, on peut noter une estimation moins précise de la température pour les modèles discontinus (TGD et Gdimp), particulièrement dans les zones de contact bien que les échanges thermiques conductifs sont correctement pris en compte.

Perspectives

Malgré ces résultats encourageants, beaucoup de points restent encore à éclaircir. C'est pourquoi, il serait intéressant d'approfondir les validations des trois modèles sur des problèmes expérimentaux et des cas industriels plus renseignés et plus complexes, et surtout d'améliorer la formulation Mixte continue :

- On a vu que notre formulation reste stable tant que le jeu de paramètres (taille de maille, pas de temps, conditions initiales et conditions aux limites thermiques) utilisé est raisonnable; autrement dit avec un choc thermique très violent, il y aura apparition de fluctuations spatio-temporelles dès que le pas de temps est très petit. Le TGD et le Gdimp sont, dans ce cas, beaucoup plus stables. L'idée de les coupler semble alors légitime en présence de ce type de chocs. Pour activer le couplage Gdimp/formulation Mixte, plusieurs critères devront alors être choisis, comme par exemple :
 - * un critère dépendant d'une valeur fixée du pas de temps mécanique,
 - * ou un critère dépendant d'une erreur de gradient de température,
 - * critère activé en début de simulation, là où les chocs thermiques devraient être prépondérants,
 - * ou critère activé dès qu'une partie du lopin est en contact avec l'outil.
- Pour réduire encore le temps de calculs, la version parallèle de Forge3[®] serait conseillée. La nouvelle formulation étant parallélisable, peu de modifications seront nécessaires. Par

contre, si nous nous orientons vers un couplage des modèles thermiques, ou simplement vers l'utilisation de l'un des deux modèles Galerkin Discontinu, un plus gros travail de programmation devra être effectué, essentiellement à cause des inconnues définies non plus aux noeuds mais par élément.

- L'ensemble de notre travail concerne l'amélioration de l'équilibre thermique du logiciel Forge3[®] séquentiel monocorps, avec uniquement la prédiction de l'évolution thermique du lopin et la supposition d'outils indéformables. Depuis, une nouvelle version commercialisée, beaucoup plus réaliste, a vu le jour : c'est la version multicorps développée par [Barboza 2004] et [Terzolo 2004] permettant de suivre à la fois les évolutions thermiques et les déformations aussi bien dans le lopin que dans les divers outillages devenus déformables. C'est [Terzolo 2004] qui s'occupa de la résolution thermique en modifiant l'approche Galerkin standard au cas multicorps. Cela serait donc intéressant d'intégrer nos trois modèles dans cette nouvelle version. Bien sûr, il faudra adapter les équations, notamment en tenant compte du terme de couplage entre les deux matériaux, au niveau de l'interface de contact multicorps.

Dans le cas du processus de forgeage à chaud, la température de la pièce va fortement influencer la température des outils et inversement : il y a donc couplage entre les deux matériaux, avec indéniablement un couplage fort (besoin d'introduire une méthode maître-esclave basée sur les éléments de contact). Ces échanges multicorps sont de deux types, avec d'abord la prise en compte de la contribution provenant de la conduction entre les deux corps et celle du terme provenant du frottement entre les deux corps déformables.

- En évoquant l'idée du critère sur l'erreur du gradient thermique, on pourrait également envisager à plus long terme un remailleur thermique adaptatif basé sur un estimateur d'erreurs en gradient thermique. En effet, pour éviter le choc thermique, on pourrait considérer le raffinement de maillage en introduisant un maillage thermique différent du maillage mécanique. Là où les chocs thermiques seront importants, on pourrait découpler les structures de maillages mécanique et thermique. Le maillage thermique sera alors considéré comme un raffinement du maillage mécanique, dans les zones de chocs thermiques. Bref, cette étude peut, à elle seule, faire l'objet d'une thèse en considérant les étapes suivantes :
 - * recherche d'un critère de raffinement en fonction du gradient thermique calculé sur le maillage mécanique. La littérature étant assez riche dans ce domaine, on pourrait par exemple s'inspirer des travaux de [Lewis et al. 1991], [Chambarel-Pumborios 1992] [Franca-Haghighi 1994], [Pelletier et al. 1994], [Papastavrou-Verfürth 2000] et [Probert et al. 1992].
 - * adaptation du mailleur pour générer des sous mailles dans les zones où le critère est atteint : remaillage anisotrope dans la direction du choc thermique [Prax-Sadat 1998], [Murthy-Mathur 1998], [Gruau 2004].
 - * à chaque pas de temps, transfert des informations entre mécanique et thermique pour le calcul couplé [Bousseta 2005].
 - * adaptation au calcul parallèle : décomposition judicieuse entre les domaines thermiques et mécaniques [Terzolo 2004, Barboza 2004].

Annexe A

Schéma de discrétisation temporelle à trois pas de temps

On se propose de détailler les calculs nous conduisant au système différentiel (1.47). En combinant les expressions (1.39) et (1.40), le système (1.32) prend la forme :

$$\begin{aligned}
 & C \left(\frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{\Delta t_1} + \frac{\gamma_1 T_n + \gamma_2 T_{n+1}}{\Delta t_2} \right) + K (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n + \alpha_3 T_{n+1}) \\
 \Leftrightarrow & \left(C \frac{\gamma_2}{\Delta t_2} + K \alpha_3 \right) T_{n+1} = Q - K (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n) - C \left(\frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{\Delta t_1} + \frac{\gamma_1 T_n}{\Delta t_2} \right) \\
 \Leftrightarrow & P T_{n+1} = \frac{1}{\alpha_3} \left[Q - K (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n) - C \left(\frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{\Delta t_1} + \frac{\gamma_1 T_n}{\Delta t_2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

avec P la matrice définie par $P = C \frac{\gamma_2}{\alpha_3 \Delta t_2} + K$.

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & P T_{n+1} = \frac{1}{\alpha_3} \left[Q + \left(C \frac{\gamma_2}{\alpha_3 \Delta t_2} - P \right) (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n) - C \left(\frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{\Delta t_1} + \frac{\gamma_1 T_n}{\Delta t_2} \right) \right] \\
 \Leftrightarrow & P T^* = Q + C \left[\left(\frac{\alpha_1 \gamma_2}{\alpha_3 \Delta t_2} - \frac{\beta_1}{\Delta t_1} \right) T_{n-1} + \left(\frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_3 \Delta t_2} - \frac{\beta_2}{\Delta t_1} - \frac{\gamma_1}{\Delta t_1} \right) T_n \right]
 \end{aligned}$$

En posant $\kappa_0 = \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\alpha_3 \Delta t_2} - \frac{\beta_1}{\Delta t_1}$ et $\kappa_1 = \frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_3 \Delta t_2} - \frac{\beta_2}{\Delta t_1} - \frac{\gamma_1}{\Delta t_1}$, on obtient finalement :

$$\boxed{P T^* = Q + C (\kappa_0 T_{n-1} + \kappa_1 T_n)} \quad (\text{A.1})$$

Remarque A.1 Avec $\Delta t_1 = \Delta t_2$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = -\gamma_2 \\ \beta_1 = -\beta_2 = \gamma_2 - 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 = \frac{3}{2} - 2\alpha_1 - \gamma_2 \\ \alpha_3 = \alpha_1 - \frac{1}{2} + \gamma_2 \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Annexe B

Schéma Taylor Galerkin appliqué au problème scalaire 1D de convection

Pour résoudre l'équation (B.1) avec a une constante positive,

$$u_t = a u_x \quad (\text{B.1})$$

trois techniques d'approximations temporelles vont être abordées avant de pouvoir appliquer la formulation Galerkin qui permettra d'obtenir l'écriture complète de l'équation discrète.

B.1 Technique basée sur un pas de temps "arrière" (explicite)

La discrétisation de la dérivée temporelle s'exprime par un schéma d'Euler tel que :

$$u_t^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = a u_x^n \quad (\text{B.2})$$

Autrement dit, on aura recours à l'utilisation du développement de Taylor explicite pour u_t à l'instant n :

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \Delta t u_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}^n + \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt}^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ \Leftrightarrow \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} &= u_t^n + \frac{\Delta t}{2} u_{tt}^n + \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt}^n + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} u_{tt} &= a^2 u_{xx} \\ u_{ttt} &= a^2 (u_t)_{xx} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

En combinant (B.3) et (B.4) dans l'équation (B.1), on aboutit :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{a^2 \Delta t^2}{6} (u_t)_{xx}^n &= a u_x^n + \frac{a^2 \Delta t}{2} u_{xx}^n \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{a^2 \Delta t^2}{6} \partial_{xx} \right) \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) &= a u_x^n + \frac{a^2 \Delta t}{2} u_{xx}^n \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En appliquant la formulation Galerkin à l'équation (B.5) grâce à l'approximation locale suivante :

$$U(x,t) = \sum_j \phi_j(x) U_j(t), \quad (\text{B.6})$$

nous en déduisons l'équation de Galerkin qui s'écrit :

$$\left\langle \left(1 - \frac{a^2 \Delta t^2}{6} \partial_{xx} \right) (U^{n+1} - U^n) - a \Delta t U_x^n - \frac{a^2 \Delta t^2}{2} U_{xx}^n, \phi_i \right\rangle = 0 \quad \forall i \quad (\text{B.7})$$

avec $\langle u, v \rangle$ la notation du produit scalaire dans L^2 . En choisissant de prendre des fonctions d'interpolation linéaires ($\phi_j \in P^1$) et une taille maille h uniforme, l'équation (B.7) discrète se met sous la forme suivante avec comme paramètre nodal U_j^n :

$$\left[1 + \frac{1}{6} (1 - C^2) \delta^2 \right] (U_j^{n+1} - U_j^n) = C \Delta_0 U_j^n + \frac{1}{2} C^2 \delta^2 U_j^n \quad (\text{B.8})$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} C = a \frac{\Delta t}{h} \\ \Delta_0 U_j = \frac{1}{2} (U_{j+1} - U_{j-1}) \\ \delta^2 U_j = U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Le schéma (B.8) est appelé le schéma Taylor Galerkin explicite, noté ETG et il est d'ordre 3 en précision.

B.2 Technique basée sur un pas de temps "saute-mouton" (leap-frog)

La discrétisation de la dérivée temporelle s'exprime par un schéma de différence finie centrée :

$$u_t^n = \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2 \Delta t} = a u_x^n \quad (\text{B.10})$$

Deux développements de Taylor sont donc nécessaires pour utiliser cette discrétisation centrée :

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t u_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}^n + \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt}^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ u^{n-1} = u^n - \Delta t u_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}^n - \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt}^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

$$u_t^n = \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2 \Delta t} - \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt}^n \quad (\text{B.12})$$

$$\left(1 - \frac{a^2 \Delta t^2}{6} \partial_{xx} \right) \left(\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2 \Delta t} \right) = a u_x^n \quad (\text{B.13})$$

$$\left\langle \left(1 - \frac{a^2 \Delta t^2}{6} \partial_{xx} \right) (U^{n+1} - U^{n-1}) - 2 a \Delta t U_x^n, \phi_i \right\rangle = 0 \quad \forall i \quad (\text{B.14})$$

En utilisant les fonctions de base linéaires, le schéma de Taylor Galerkin leap-frog, noté LFTG, se met sous la forme (B.15) :

$$\left[1 + \frac{1}{6} (1 - C^2) \delta^2 \right] (U_j^{n+1} - U_j^{n-1}) = 2 C \Delta_0 U_j^n \quad \forall j \quad (\text{B.15})$$

C'est un schéma précis à l'ordre 4 et stable si $C \leq 1$.

B.3 Technique basée sur un pas de temps de Crank-Nicholson

La discrétisation se fait par un schéma standard de Crank-Nicholson :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} a (u_x^n + u_x^{n+1}) \quad (\text{B.16})$$

avec l'utilisation des développements de Taylor suivants :

$$\begin{cases} u^{n+1} &= u^n + \Delta t u_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}^n + \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt}^n + \dots \\ u^n &= u^{n+1} - \Delta t u_t^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}^{n+1} - \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt}^{n+1} + \dots \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (u_t^n + u_t^{n+1}) + \frac{\Delta t}{4} (u_{tt}^n - u_{tt}^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{12} (u_{ttt}^n + u_{ttt}^{n+1}) \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{a}{2} (u_x^n + u_x^{n+1}) + \frac{a^2 \Delta t}{4} (u_{xx}^n - u_{xx}^{n+1}) + \frac{a^2 \Delta t^2}{12} \partial_{xx} (u_t^n + u_t^{n+1}) \quad (\text{B.19})$$

En posant $\frac{1}{2} (u_t^n + u_t^{n+1}) = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$ l'équation (B.19) prend la forme :

$$\left(1 - \frac{a^2 \Delta t^2}{6} \partial_{xx} \right) \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) = \frac{a}{2} (u_x^n + u_x^{n+1}) + \frac{a^2 \Delta t^2}{4} (u_{xx}^n + u_{xx}^{n+1}) \quad (\text{B.21})$$

Pour $\forall i$, on a :

$$\left\langle \left(1 - \frac{a^2 \Delta t^2}{6} \partial_{xx} \right) (U^{n+1} - U^n) - \frac{a \Delta t}{2} (U_x^n + U_x^{n+1}) - \frac{a^2 \Delta t^2}{4} (U_{xx}^n + U_{xx}^{n+1}), \phi_i \right\rangle = 0 \quad (\text{B.22})$$

C'est le modèle Taylor Galerkin Crank-Nicholson, noté CNTG.

Annexe C

Analyse de sensibilité des paramètres k , ρ et c sur la solution numérique TGD "forgeage"

Pour compléter l'étude de sensibilité traitée à la page 74 du chapitre 2, nous rajoutons dans cette Annexe, l'estimation de l'erreur TGD "forgeage" déduite de l'ensemble des tests récapitulés dans le tableau 2.9.

- Dans les tableaux C.1, C.2 et C.3, nous avons calculé l'erreur moyenne TGD pour l'ensemble de ces tests, d'abord en fonction de la conductivité k , puis de la densité ρ et enfin de la capacité calorifique c .

	k=1	k=5	k=10	k=15	k=20	k=30	k=50
erreur TGD	0,15%	2,53%	4,07%	4,96%	5,58%	6,45%	7,47%

TAB. C.1 – Erreur moyenne du schéma TGD en fonction de la conductivité k .

	$\rho = 1000$	$\rho = 2500$	$\rho = 5000$	$\rho = 7800$	$\rho = 10\,000$	$\rho = 15\,000$
erreur TGD	8,83%	7,34%	5,92%	4,96%	4,42%	3,52%

TAB. C.2 – Erreur moyenne du schéma TGD en fonction de la masse volumique ρ .

	c=10	c=100	c=200	c=300	c=360	c=500	c=1000
erreur TGD	8,24%	7,62%	6,22%	5,35%	4,96%	4,25%	2,7%

TAB. C.3 – Erreur moyenne du schéma TGD en fonction de la capacité calorifique c .

- Nous représentons les diverses courbes de l'erreur TGD obtenues en faisant varier à tour de rôle la conductivité k (figure C.1(a)), puis la densité ρ (figure C.1(b)) et enfin la capacité calorifique c (figure C.1(c)).

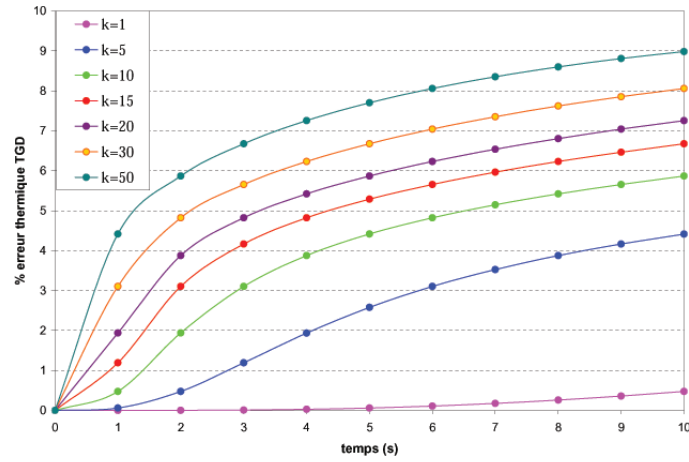
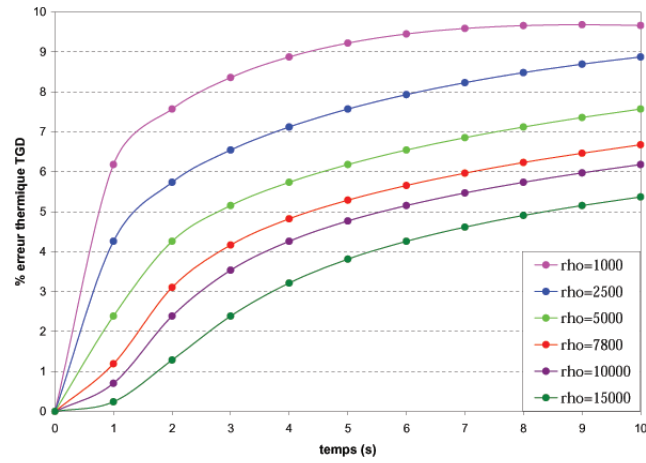
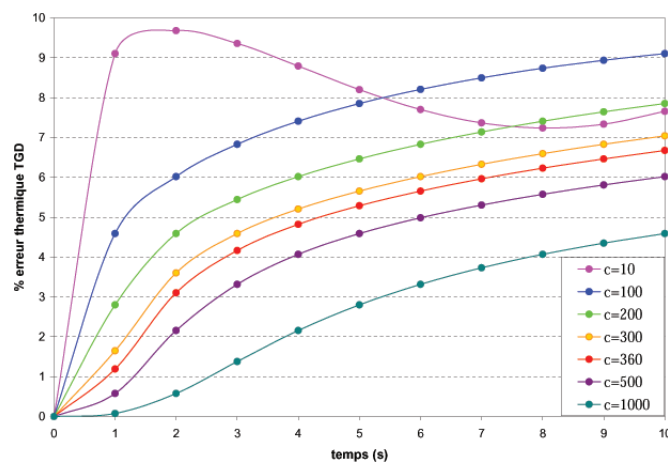
(a) influence de la conductivité k (b) influence de la densité ρ (c) influence de la capacité c

FIG. C.1 – Evolution de l'erreur thermique TGD pour le capteur situé à 10mm du bord régulé thermiquement.

Annexe D

Modèle spatio-temporel combiné à l'élément P_0/P_0^+

D.1 Principe

Il s'agit d'un modèle "découplé" en espace et en temps pour lequel l'intégration spatiale est du type Galerkin Discontinu utilisant des éléments finis P_0/P_0^+ en température/gradient de température. L'intégration temporelle, quant à elle, utilise des éléments finis discontinus P_0 en temps, plus précisément une interpolation constante par tranche temporelle $]t_i, t_{i+1}[$. Autrement dit, ce choix recouvre deux approximations :

- une interpolation constante par rapport aux variables d'espace x :

$$T \in P_0(K) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\nabla T} \in P_0^+(K),$$

- une interpolation discontinue constante par rapport au temps t :

$$T \in P_0(]t_i, t_{i+1}[) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\nabla T} \in P_0(]t_i, t_{i+1}[).$$

On peut donc introduire l'espace d'approximations W_h^{st} tel que :

$$W_h^{st} = \left\{ w_h \in L^2(\Omega^{st}), w_h|_{K^i} \in P_0(K^i), K^i \subset \Omega_h^{st} \right\}$$

Bien évidemment, comme pour l'évaluation des dérivées spatiales, la dérivée temporelle de la température ne pourra être définie au sens fort puisque la fonction T n'est pas continue sur l'intervalle $]0, t[$. Il faudra donc l'évaluer dans un sens plus faible, celui des distributions sur l'espace Ω_{ST} .

D.2 Discrétisation de l'équation de la chaleur avec une formulation espace/temps

Rappelons, tout d'abord, le problème thermique instationnaire régi par l'équation de la chaleur à laquelle on associe des conditions initiales et aux limites :

Trouver $T(x, t)$ tel que pour $\forall (x, t) \in \Omega \times]0, t_f[$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T + k \operatorname{div} \vec{q} = \frac{1}{\rho c} \dot{w} & \text{sur } \Omega \times]0, t_f[\\ \vec{q} + \vec{\nabla} T = \vec{0} & \text{sur } \Omega \times]0, t_f[\\ T(x, 0) = T_0(x) & \text{sur } \Omega \times \{0\} \\ T(x, t) = g(x, t) & \text{sur } \partial\Omega \times]0, t_f[\end{array} \right. \quad (\text{D.1})$$

où t_f représente la durée totale du processus thermique étudié, k la diffusivité thermique du milieu Ω , T_0 une fonction connue dépendant uniquement de la position du point matériel et $g(x, t)$ une fonction donnée dépendant de la position x et du temps t .

En définitive, la discrétisation de l'équation de la chaleur, sous sa forme mixte $T/\vec{\nabla} T$, à l'aide de la méthode des éléments finis espace/temps (P_0/P_0^+ en espace et P_0 en temps) est obtenue à partir des équations traitant de la discrétisation :

– du terme de dérivation temporelle

$$\frac{\partial T_h}{\partial t} \Big|_{K \times]t_i, t_{i+1}[} = |K| (T_K^i - T_K^{i-1}) \quad \text{où} \quad T_K^i = T_h|_{K^i} \quad (\text{D.2})$$

– du terme de convection

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T_h \Big|_{K \times]t_i, t_{i+1}[} = -(t_{i+1} - t_i) \sum_{F \in \partial K} [T_h^i]_K^F \int_F (\vec{v} \cdot \vec{n})^- ds \\ \text{avec } [T_h^i]_K^F = T_K^i - T_{K(F)}^i \end{array} \right. \quad (\text{D.3})$$

– du terme de diffusion

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{q}_h \Big|_{K \times]t_i, t_{i+1}[} = (t_{i+1} - t_i) \sum_{F \in \partial K} \omega \vec{q}_{K^F}^i \cdot |F| \vec{n}_K^F \\ \text{avec } \vec{q}_{K^F}^i = (T_K^i - T_{K(F)}^i) \frac{D |F| \vec{n}_K^F}{|K| + |K(F)|} \end{array} \right. \quad (\text{D.4})$$

– du terme de dissipation

$$(\dot{w}_h, \varphi)_{\Omega_h^{st}} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{K \subset \Omega_h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_K \dot{w} \varphi d\Omega dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_h^{st}) \quad (\text{D.5})$$

Comme l'énergie dissipée \dot{w} est supposée constante sur l'élément spatio-temporel, de valeur \dot{w}_K^i :

$$(\dot{w}_h, \varphi)_{\Omega_h^{st}} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{K \subset \Omega_h} \dot{w}_K^i |K| (t_{i+1} - t_i) \quad (\text{D.6})$$

En choisissant de prendre φ parmi les fonctions de base de l'espace W_h^{st} , on en déduit une évaluation locale du terme source :

$$\dot{w}_h \Big|_{K \times]t_i, t_{i+1}[} = \dot{w}_K^i |K| (t_{i+1} - t_i) \quad (\text{D.7})$$

Finalement, en combinant les quatre termes discrétisés ci-dessus, nous pouvons écrire le bilan de la discrétisation spatio-temporelle de l'équation de la chaleur (P_0/P_0^+ en espace et P_0 en temps) :

Etant donné T_K^{i-1} , trouver T_K^i tel que pour tout $K^i \in \Omega_h^{st}$, le système suivant soit vérifié :

$$\left\{ \begin{array}{l} |K| (T_K^i - T_K^{i-1}) - (t_{i+1} - t_i) \sum_{F \in \partial K} (T_K^i - T_{K(F)}^i) \int_F (\vec{v} \cdot \vec{n})^- ds \\ + k (t_{i+1} - t_i) \sum_{F \in \partial K} \omega \vec{q}_{KF}^i \cdot |F| \vec{n}_K^F = \frac{1}{\rho c} \dot{w}_K^i |K| (t_{i+1} - t_i) \\ \vec{q}_{KF}^i = (T_K^i - T_{K(F)}^i) \frac{D |F| \vec{n}_K^F}{|K| + |K(F)|} \end{array} \right. \quad (D.8)$$

Si l'on considère des intervalles de temps constants de longueur Δt et si l'on affecte la valeur optimal au facteur de formes $\omega = \frac{1}{d}$, [Batkam-Coupez 2001] en déduisent une expression équivalente :

Etant donné $T_K^{t-\Delta t}$, trouver T_K^t qui vérifie pour tout $K \in \Omega_h^{st}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} (T_K^t - T_K^{t-\Delta t}) - \frac{1}{|K|} \sum_{F \in \partial K} (T_K^t - T_{K(F)}^t) \int_F (\vec{v} \cdot \vec{n})^- ds \\ + \frac{k}{|K|} \sum_{F \in \partial K} (T_K^t - T_{K(F)}^t) \frac{D |F|^2}{d |K| + |K(F)|} = \frac{\dot{w}_K^t}{\rho c} \end{array}} \quad (D.9)$$

C'est sous cette dernière forme que [Batkam-Coupez 2001] choisissent de résoudre numériquement leur problème thermique.

Les méthodes de résolution sont les mêmes que celles utilisées pour résoudre le modèle Gdimp : il s'agit soit de la méthode itérative de Jacobi (ou Gauss-Seidel), soit de la méthode de type gradient conjugué.

Annexe E

Test de compression du cylindre Aubert & Duval

E.1 Loi rhéologique point à point

La rhéologie est une loi thermo-écrouissable définie point par point, c'est à dire que la contrainte σ dépend de $\bar{\varepsilon}$, de $\dot{\varepsilon}$ et de T tels que :

	$\bar{\varepsilon} = 0,5$	$\bar{\varepsilon} = 1$	$\bar{\varepsilon} = 1,5$	$\bar{\varepsilon} = 2$	$\bar{\varepsilon} = 2,5$	$\bar{\varepsilon} = 3$
$\dot{\varepsilon} = 0,01$	257,9	257,9	257,9	257,9	257,9	257,9
$\dot{\varepsilon} = 0,03$	293	293	293	293	293	293
$\dot{\varepsilon} = 0,1$	337,9	337,9	337,9	337,9	337,9	337,9

TAB. E.1 – Valeurs du flux des contraintes pour une température $T = 600^{\circ}\text{C}$ et 900°C .

	$\bar{\varepsilon} = 0,5$	$\bar{\varepsilon} = 1$	$\bar{\varepsilon} = 1,5$	$\bar{\varepsilon} = 2$	$\bar{\varepsilon} = 2,5$	$\bar{\varepsilon} = 3$
$\dot{\varepsilon} = 0,01$	185,5	185,5	185,5	185,5	185,5	185,5
$\dot{\varepsilon} = 0,03$	211	211	211	211	211	211
$\dot{\varepsilon} = 0,1$	243,3	243,3	243,3	243,3	243,3	243,3

TAB. E.2 – Valeurs du flux des contraintes pour une température $T = 950^{\circ}\text{C}$.

	$\bar{\varepsilon} = 0,5$	$\bar{\varepsilon} = 1$	$\bar{\varepsilon} = 1,5$	$\bar{\varepsilon} = 2$	$\bar{\varepsilon} = 2,5$	$\bar{\varepsilon} = 3$
$\dot{\varepsilon} = 0,01$	137,2	137,2	137,2	137,2	137,2	137,2
$\dot{\varepsilon} = 0,03$	155,8	155,8	155,8	155,8	155,8	155,8
$\dot{\varepsilon} = 0,1$	179,3	179,3	179,3	179,3	179,3	179,3

TAB. E.3 – Valeurs du flux des contraintes pour une température $T = 1000^{\circ}\text{C}$.

	$\bar{\varepsilon} = 0,5$	$\bar{\varepsilon} = 1$	$\bar{\varepsilon} = 1,5$	$\bar{\varepsilon} = 2$	$\bar{\varepsilon} = 2,5$	$\bar{\varepsilon} = 3$
$\dot{\varepsilon} = 0,01$	103,4	103,4	103,4	103,4	103,4	103,4
$\dot{\varepsilon} = 0,03$	117,9	117,9	117,9	117,9	117,9v	117,9
$\dot{\varepsilon} = 0,1$	135,8	135,8	135,8	135,8	135,8	135,8

TAB. E.4 – Valeurs du flux des contraintes pour une température $T = 1050^{\circ}\text{C}$ et 1200°C .

E.2 Loi thermique point à point

La conductivité k , la densité ρ et la capacité calorifique c ne sont plus des constantes mais des fonctions dépendant de la valeur de la température T :

	Conductivité k	Masse volumique ρ	Capacité c
$T = 20^{\circ}C$	11,6	8230	430
$T = 200^{\circ}C$	14,2	8171	473
$T = 400^{\circ}C$	17,2	8098	521
$T = 500^{\circ}C$	18,7	8062	546
$T = 600^{\circ}C$	20,5	8019	571
$T = 700^{\circ}C$	22,3	7974	598
$T = 800^{\circ}C$	23,7	7924	624
$T = 900^{\circ}C$	25,6	7870	651
$T = 1\,000^{\circ}C$	27,5	7817	681
$T = 1\,200^{\circ}C$	31,5	7733	748

TAB. E.5 – Valeurs des données du matériau en fonction de la température.

Table des figures

1	<i>Couplage thermomécanique: a) Trempe, b) Forgeage.</i>	3
1.1	<i>Conditions aux limites mixtes du problème thermique.</i>	10
1.2	<i>Élément tétraédrique à 4 noeuds.</i>	14
1.3	<i>Refroidissement d'une barre d'acier soumise à une température imposée constante.</i>	21
1.4	<i>Mise en évidence du choc thermique au niveau du second traceur lors du refroidissement d'une barre.</i>	21
1.5	<i>Représentation 2D d'une mesure objective de la taille de maille h [Aliaga 2000].</i>	24
1.6	<i>Visualisation du choc thermique sur la première couche des éléments.</i>	25
1.7	<i>Comparaison entre la thermique synchrone et asynchrone [D'Alvise 2002].</i>	26
1.8	<i>Stabilisation du choc thermique par la thermique asynchrone [Aliaga 2000].</i>	26
1.9	<i>Comparaison entre maillage structuré et non structuré pour une taille de maille h identique très fine [Aliaga 2000].</i>	27
1.10	<i>Evolution de la conductivité augmentée k.</i>	29
1.11	<i>Evolution de la température pour un traceur situé à 4mm du bord thermiquement imposé [Fachinotti 2004].</i>	29
1.12	<i>Domaine 2D spatio-temporel $\Omega \times]0, T[$ [Thompson-Pinsky 1996].</i>	34
1.13	<i>Solutions numériques (traits pleins) en fonction de la solution exacte (pointillés) de l'équation (1.109) [Donea 1984].</i>	39
1.14	<i>Cinématique du problème: domaine et frontières [Baumann-Oden 1999].</i>	41
1.15	<i>Comparaison avec $S = 1$ et $P_e = 100$ [Baumann-Oden 1999].</i>	43
1.16	<i>Problème dit de Hemker avec $\alpha = 10^{-10}$ et $h = 1/10$ [Baumann-Oden 1999].</i>	43
1.17	<i>Taux de h-convergence pour $\alpha = 10^2$ [Baumann-Oden 1999].</i>	44
1.18	<i>Domaine espace-temps $\Omega_{st} = \Omega \times [0, t]$.</i>	46
1.19	<i>Maillage composé d'éléments spatio-temporels K^i en 2D [Kim 2001].</i>	46
1.20	<i>Maillage Ω_{st} composé d'éléments spatio-temporels K^i en 2D [Batkam 2002].</i>	48
2.1	<i>Configuration 2D de l'élément fini mixte P_0/P_0 en température/flux.</i>	56
2.2	<i>Calcul du saut à l'interface de deux éléments.</i>	57
2.3	<i>Schéma P_0/P_0: contribution de 2 couches d'éléments au voisinage de l'élément K.</i>	59
2.4	<i>Barre d'acier à 800°C soumise à une température constante $T_{imp} = 25^\circ\text{C}$; maillage de la barre avec $h = 2,8\text{ mm}$.</i>	62
2.5	<i>Isovaleurs de la température au cours de la résolution TGD: mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.</i>	63
2.6	<i>Représentation de la solution analytique pour les deux capteurs situés respectivement à 10 mm et 20 mm du bord régulé thermiquement.</i>	64
2.7	<i>Représentation du choc thermique avec échauffement du second noeud [Aliaga 2000].</i>	64
2.8	<i>Absorption du choc thermique avec la version TGD "TTT" de [Aliaga 2000].</i>	65
2.9	<i>Evolution de la température des 2 traceurs: comparaison entre la solution analytique et la version TGD "forgeage" de Forge3[®].</i>	65
2.10	<i>Evolution de l'erreur TGD (2.24) pour les deux traceurs.</i>	66
2.11	<i>Evolution de la température TGD avec un maillage grossier $h = 5\text{ mm}$.</i>	67

2.12	Taille de maille $h = 2,5\text{ mm}$	67
2.13	Evolution de la température TGD : influence du mode de triangulation du maillage pour $h = 2,5\text{ mm}$	68
2.14	Raffinement du maillage de la barre.	69
2.15	Evolution thermique TGD des deux traceurs en fonction du raffinement du maillage à pas de temps fixé ($dt = 1\text{ s}$).	69
2.16	Etude de l'erreur de la solution numérique TGD en fonction du maillage.	70
2.17	Evolution thermique en fonction du pas de temps dt à maillage fixé ($h = 2\text{ mm}$).	71
2.18	Evolution de l'erreur TGD des deux traceurs en fonction de dt avec $h = 2\text{ mm}$	71
2.19	Sensibilité du schéma TGD au degré n : évolution de la température pour $z = 10\text{ mm}$ et $h = 2\text{ mm}$	72
2.20	Sensibilité du schéma TGD en fonction de l'erreur ε : évolution de la température pour $z = 10\text{ mm}$ et $h = 2\text{ mm}$	74
2.21	Evolution de la température pour le capteur situé à $z = 10\text{ mm}$ avec $h = 2,8\text{ mm}$	75
2.22	Barre d'acier à 25°C soumise à un flux constant $\Phi_{imp} = 1\text{ MW/m}^2$	76
2.23	Isovaleurs de la température au cours de la résolution thermique TGD.	77
2.24	Représentation de la solution analytique pour cinq capteurs situés respectivement à 0 mm , 1 mm , 10 mm , 20 mm et 50 mm du bord régulé thermiquement.	78
2.25	Evolution de la thermique TGD pour les 5 traceurs avec $h = 2,3\text{ mm}$ et $dt = 1\text{ s}$	78
2.26	Evolution de la température du traceur situé à $z = 1\text{ mm}$ pour $h = 2,3\text{ mm}$ et $dt = 1\text{ s}$	79
2.27	Evolution de la température pour les traceurs situés à $z = 10\text{ mm}$ et $z = 20\text{ mm}$	79
2.28	De gauche à droite, maillages de la barre de plus en plus raffinés avec $h = 2,3\text{ mm}$, $h = 2\text{ mm}$, $h = 1\text{ mm}$ et $h = 0,75\text{ mm}$	80
2.29	Etude de la sensibilité du schéma TGD en fonction de la taille de maille.	81
2.30	Evolution de l'erreur TGD en fonction de la taille de maille.	81
2.31	Evolution de la température TGD pour le capteur situé à $z = 0\text{ mm}$ en fonction de la valeur de Φ_{imp} ($h = 2\text{ mm}$).	82
2.32	Evolution de l'erreur TGD maximale pour le capteur $z = 0\text{ mm}$ en fonction de Φ_{imp}	82
2.33	Refroidissement d'une plaque sur ses deux parois latérales [Pichelin-Coupez 1999].	84
2.34	Test de température imposée : comparaison entre l'approche GS et le schéma TGD [D'Alvise 2002].	84
2.35	A gauche la thermique asynchrone et à droite la thermique TGD [Aliaga 2000].	85
2.36	Comparaison entre la méthode TGD et la méthode de diffusion fractionnée [Fachinotti 2004].	86
2.37	Notations 2D sur l'élément K décomposé en 3 sous-éléments K^F [Batkam 2002].	89
2.38	L'élément fini mixte P_0/P_0^+ en température/flux de chaleur [Batkam 2002].	90
2.39	Calcul du saut à l'interface de deux sous-éléments K^{F_1} et K^{F_3}	91
2.40	Comparaison des schémas P_0/P_0 et P_0/P_0^+ : contributions locales de l'élément courant K [Batkam-Coupez 2001].	95
2.41	Elément externe fictif adjacent à une face frontière F	95
2.42	Isovaleurs de la température au cours de la résolution Gdimp : mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.	101
2.43	Evolution de la température des 3 traceurs : comparaison entre la solution analytique et la version Gdimp de Forge3 [®] : $h = 2,8\text{ mm}$ et $dt = 1\text{ s}$	101
2.44	Test de température imposée : comparaison entre la solution analytique et les diverses solutions numériques TGD et Gdimp de Forge3 [®] avec $h = 2,8\text{ mm}$	102
2.45	Evolution de l'erreur moyenne Gdimp pour les 3 traceurs : $h = 2,8\text{ mm}$ et $dt = 1\text{ s}$	102
2.46	Test de température imposée : influence du mode de triangulation du maillage sur la solution numérique Gdimp avec $h = 2,5\text{ mm}$	103

2.47	<i>Evolution thermique Gdimp des 2 traceurs en fonction du maillage raffiné avec $dt = 1s$.</i>	104
2.48	<i>Evolution de l'erreur Gdimp en fonction du raffinement du maillage avec $dt = 1s$.</i>	104
2.49	<i>Influence du pas de temps dt avec $h = 1mm$.</i>	106
2.50	<i>Isovaleurs de la température au cours de la résolution Gdimp en flux imposé.</i>	107
2.51	<i>Evolution de la température des 2 traceurs : comparaison entre la solution analytique et la version Gdimp de Forge3[®].</i>	108
2.52	<i>Evolution de la température du capteur positionné à $z = 1mm$: comparaison entre la solution analytique, la version GS, la version TGD et Gdimp de Forge3[®], avec $h=2,3mm$.</i>	108
2.53	<i>Comparaison entre la solution analytique, la version GS asynchrone, la version TGD et la version Gdimp de Forge3[®] pour les noeuds positionnés à $z = 10mm$ et $z = 20mm$.</i>	109
2.54	<i>Influence de la valeur de Φ_{imp} sur la solution numérique Gdimp : évolution de la température pour un noeud placé directement sur la face imposée ($z = 0mm$) avec $h = 2mm$.</i>	109
3.1	<i>Elément P_2/P_1 en température/flux [Manzari 1998].</i>	118
3.2	<i>Evolution de la température [Manzari 1998].</i>	119
3.3	<i>Configuration 2D de l'élément fini mixte P_1/P_1 en température/flux.</i>	123
3.4	<i>Test de conduction imposée : $T_0 = 25^\circ C$, $T_{out} = 50^\circ C$ et $h_{cd} = 20\,000\,W/m/^\circ K$.</i>	133
3.5	<i>Evolution de la température des 2 traceurs : comparaison entre la solution analytique et les divers schémas d'intégration temporelle de la formulation Mixte P_1/P_1.</i>	135
3.6	<i>Isovaleurs de la température après 1 seconde.</i>	136
3.7	<i>Isovaleurs de la température après 30 secondes.</i>	136
3.8	<i>Evolution de la température pour les 5 schémas d'intégration en fonction du maillage avec un capteur en peau à $z = 1mm$.</i>	137
3.9	<i>Evolution de la température pour les 5 schémas d'intégration en fonction du maillage avec un capteur situé à $z = 10mm$.</i>	139
3.10	<i>Evolution de la température pour les 5 schémas d'intégration en fonction du maillage avec un capteur situé à $z = 20mm$.</i>	140
3.11	<i>Evolution thermique des noeuds situés à $1mm$, $10mm$ et $20mm$ avec $h = 1mm$.</i>	142
3.12	<i>Isovaleurs de la température du schéma Dupont implicite après un incrément dt.</i>	143
3.13	<i>Isovaleurs de la température du schéma Mixte implicite après un incrément dt.</i>	143
3.14	<i>Isovaleurs de la température au cours de la résolution Mixte : mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.</i>	145
3.15	<i>Isovaleurs de la composante suivant z du flux de chaleur lors de la résolution Mixte continue : mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.</i>	145
3.16	<i>Comparaison entre la formulation Mixte continue et la solution analytique.</i>	146
3.17	<i>Evolution du flux q_z : comparaison entre la solution analytique et la formulation Mixte de Forge3[®].</i>	146
3.18	<i>Evolution de la température : comparaison entre l'analytique, le TGD, le Gdimp et la formulation Mixte sur le test standard de température imposée.</i>	147
3.19	<i>Influence du mode de triangulation sur l'évolution de la température "Mixte".</i>	148
3.20	<i>Influence du mode triangulation sur l'évolution du flux q_z avec $h = 2,5mm$.</i>	148
3.21	<i>Influence du raffinement du maillage sur l'évolution de la température avec une résolution Mixte P_1/P_1.</i>	149
3.22	<i>Evolution de l'erreur thermique "Mixte" en fonction du raffinement du maillage.</i>	150
3.23	<i>Raffinement du maillage à pas de temps fixé : évolution de la composante q_z du flux pour $z = 10mm$.</i>	150
3.24	<i>Influence du pas de temps dt : noeud situé à $1mm$ avec $h = 1mm$.</i>	151

3.25	<i>Influence du pas de temps dt: noeud situé à 10mm avec $h = 1\text{mm}$.</i>	151
3.26	<i>Influence du pas de temps dt: noeud situé à 20mm avec $h = 1\text{mm}$.</i>	152
3.27	<i>Influence du pas de temps dt sur l'évolution du flux q_z avec $z = 10\text{mm}$.</i>	152
3.28	<i>Apparition de l'équilibre thermique: noeud situé à $z = 10\text{mm}$.</i>	153
3.29	<i>Evolution de la température pour les noeuds situé à 5 et 10mm du bord imposé.</i>	154
3.30	<i>Mise en évidence du choc thermique avec la formulation Mixte.</i>	155
3.31	<i>Isovaleurs de la température au cours de la résolution Mixte: mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.</i>	156
3.32	<i>Isovaleurs de la composante suivant z du flux de chaleur lors de la résolution Mixte continue: mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.</i>	157
3.33	<i>Evolution de la température: comparaison entre la formulation Mixte continue et la solution analytique.</i>	157
3.34	<i>Evolution du flux q_z: comparaison entre la solution analytique et la formulation Mixte de Forge3[®].</i>	158
3.35	<i>Comparaison entre l'analytique, le GS, le TGD, le Gdimp et la formulation Mixte pour $z = 1\text{mm}$ et $h = 2,3\text{mm}$.</i>	158
3.36	<i>Comparaison entre l'analytique, le GS, le TGD, le Gdimp et la formulation Mixte pour $z = 10\text{mm}$ et $z = 20\text{mm}$.</i>	159
3.37	<i>Raffinement du maillage pour le capteur situé en peau avec $dt = 0,25\text{s}$.</i>	159
3.38	<i>Raffinement du pas de temps pour le capteur situé en peau avec $dt = 0,25\text{s}$.</i>	160
3.39	<i>Evolution de la température obtenue par la résolution Mixte en fonction de Φ_{imp}: noeud situé sur la face imposée ($z = 1\text{mm}$) avec $h = 2\text{mm}$.</i>	161
3.40	<i>Evolution du flux q_z pour le noeud situé à $z = 1\text{mm}$ en fonction de Φ_{imp}.</i>	161
3.41	<i>Evolution de l'erreur maximale pour la formulation Mixte.</i>	162
3.42	<i>Barre d'acier à 25°C maintenue à Φ_{cond} sur l'une de ces faces.</i>	163
3.43	<i>Représentation de la solution analytique pour les capteurs situés à 1mm, 10mm et 20mm du bord en conduction imposée.</i>	163
3.44	<i>Isovaleurs de la température au cours de la résolution Mixte.</i>	164
3.45	<i>Isovaleurs de la composante suivant z du flux de chaleur lors de la résolution Mixte continue: mise en évidence du phénomène de diffusion thermique.</i>	164
3.46	<i>Evolution de la température: comparaison des divers modèles numériques implantés dans Forge3[®] avec $h = 2,8\text{mm}$.</i>	165
3.47	<i>Evolution de flux q_z: comparaison entre l'analytique et la formulation Mixte continue.</i>	166
3.48	<i>Evolution de la température "Mixte" pour le capteur situé à $z = 10\text{mm}$.</i>	166
3.49	<i>Influence du coefficient de transfert thermique h_c sur la solution numérique Mixte.</i>	167
3.50	<i>Evolution de la température "Mixte": comparaison entre le test en température imposée et celui en conduction imposée.</i>	168
3.51	<i>Barre d'acier à 25°C en contact avec l'air sur l'ensemble de ses faces.</i>	169
3.52	<i>Comparaison des divers modèles numériques sur le test de rayonnement.</i>	170
3.53	<i>Comparaison des divers modèles numériques sur le test de réchauffement.</i>	171
3.54	<i>Comparaison des divers modèles numériques sur le test de refroidissement.</i>	171
4.1	<i>Modélisation des conditions aux limites du problème mécanique.</i>	180
4.2	<i>Configuration 3D de l'élément fini mixte P_1^+/P_1 en v/p.</i>	185
4.3	<i>Distance de pénétration.</i>	186
4.4	<i>Couplage thermomécanique [Terzolo 2004].</i>	191
4.5	<i>Test de double conduction à chaud.</i>	192
4.6	<i>Isovaleurs de la température avec une résolution thermique Mixte P_1/P_1.</i>	193
4.7	<i>Tracé de la température "Mixte" en fonction de la profondeur e: au bout d'une seconde (en haut à gauche), de 10s (en haut à droite) et de 20s (en bas).</i>	194

4.8	<i>Evolution de la température avec une résolution thermique Mixte P_1/P_1.</i>	194
4.9	<i>Comparaison entre la solution analytique et les divers modèles numériques.</i>	195
4.10	<i>Isovaleurs de la température avec les quatres modèles de résolution thermique à l'instant $dt = 0,01s$ et $h = 1mm$.</i>	196
4.11	<i>Compression d'un quart d'un cylindre : à gauche les dimensions, à droite les conditions de la simulation.</i>	197
4.12	<i>Maillage du quart de cylindre avec $h = 2,5mm$: à gauche le maillage 2D de Forge2[®] avec l'activation d'un raffinement sur le bord, à droite le maillage 3D de Forge3[®].</i>	197
4.13	<i>Résultats d'Aubert & Duval : comparaison entre la résolution thermique de Forge2[®] (pointillés) et celle de Forge3[®] (traits pleins).</i>	198
4.14	<i>Résultats Cemef pour la résolution thermique de Forge2[®] et de Forge3[®].</i>	198
4.15	<i>Comparaison de tous les résultats : évolution thermique des trois capteurs.</i>	199
4.16	<i>Résultats Cemef pour la résolution mécanique de Forge2[®] et de Forge3[®].</i>	199
4.17	<i>Résultats Cemef : comparaison des contraintes équivalentes $\bar{\sigma}$ Forge2[®] et Forge3[®].</i>	200
4.18	<i>Cas anisotherme : résultats Cemef pour la résolution thermomécanique de Forge2[®] et de Forge3[®].</i>	200
4.19	<i>Isovaleurs de la température "Mixte" : mise en évidence du phénomène d'auto-échauffement (croix du forgeron).</i>	201
4.20	<i>Cas anisotherme : évolution de la température du capteur 1.</i>	202
4.21	<i>Isovaleurs de la température avec une résolution Mixte P_1.</i>	202
4.22	<i>Evolution de la température des divers capteurs avec une résolution Mixte.</i>	203
4.23	<i>Simulation du triaxe : à gauche la pièce maillée initiale, à droite la pièce finale.</i>	204
4.24	<i>Cas anisotherme : évolutions thermiques au niveau du capteur 1.</i>	204
4.25	<i>Evolution de la température pour les deux traceurs : comparaison des quatres modèles de résolution thermique de Forge3[®].</i>	205
C.1	<i>Evolution de l'erreur thermique TGD pour le capteur situé à 10mm du bord régulé thermiquement.</i>	218

Liste des tableaux

1.1	<i>Divers schémas numériques.</i>	18
1.2	<i>Propriétés thermiques et maillage.</i>	25
2.1	<i>Algorithme de résolution Taylor Galerkin Discontinu.</i>	60
2.2	<i>Comparaison des temps de calculs et de l'erreur du schéma TGD.</i>	68
2.3	<i>Caractéristiques des maillages.</i>	69
2.4	<i>Comparaison des temps de calculs et des erreurs thermiques TGD.</i>	70
2.5	<i>Comparaison des temps de calculs et des erreurs thermiques TGD pour $dt = 0,25s$.</i>	70
2.6	<i>Comparaison des temps de calculs.</i>	72
2.7	<i>Comparaison des temps de calculs.</i>	73
2.8	<i>Comparaison des temps de calculs et des erreurs moyennes TGD.</i>	73
2.9	<i>Présentations des trois tests.</i>	74
2.10	<i>Synthèse de tous les tests.</i>	76
2.11	<i>Pourcentages de l'erreur moyenne TGD (2.24) avec $h = 2,3mm$.</i>	78
2.12	<i>Comparaison des temps de calculs et des pourcentages de l'erreur moyenne TGD.</i>	80
2.13	<i>Caractéristiques des maillages.</i>	80
2.14	<i>Temps de calculs et évaluation de l'erreur maximale (2.25) du TGD.</i>	81
2.15	<i>Notations.</i>	89
2.16	<i>Comparaison des temps de calculs et des erreurs pour les schémas Gdimp et TGD.</i>	103
2.17	<i>Comparaison des temps de résolution et des erreurs moyennes pour les schémas TGD et Gdimp.</i>	105
2.18	<i>Comparaison des temps de calculs du modèle Gdimp.</i>	106
2.19	<i>Comparaison des temps de calculs et des pourcentages d'erreur pour $h = 2,3mm$.</i>	109
2.20	<i>Bilan des modèles TGD et Gdimp.</i>	113
3.1	<i>Erreurs et temps de calculs des cinq schémas d'intégration temporelle.</i>	135
3.2	<i>Temps de calculs des cinq schémas d'intégration temporelle.</i>	138
3.3	<i>Raffinement du maillage : synthèse des schémas d'intégration temporelle.</i>	138
3.4	<i>Comparaison des temps de calculs des schémas implicites.</i>	141
3.5	<i>Comparaison des pourcentages d'erreurs des schémas implicites.</i>	142
3.6	<i>Comparaison des temps de calculs et des erreurs moyennes pour les 3 modèles.</i>	147
3.7	<i>Comparaison des temps de calculs et des pourcentages d'erreurs des 3 modèles.</i>	149
3.8	<i>Temps de calculs et pourcentages de l'erreur pour la formulation Mixte continue.</i>	150
3.9	<i>Comparaison des temps de calcul de la formulation Mixte continue.</i>	152
3.10	<i>Comparaison des temps de calculs pour les trois modèles.</i>	159
3.11	<i>Raffinement du maillage : temps de calculs et erreurs maximales.</i>	160
3.12	<i>Variation de Φ_{imp} : estimation des erreurs maximales.</i>	161
3.13	<i>Test de conduction imposée : comparaison des temps calculs et des erreurs.</i>	165
3.14	<i>Influence du coefficient de transfert thermique h_c sur l'erreur Mixte.</i>	167
3.15	<i>Comparaison des erreurs provenant d'une résolution Mixte.</i>	169
3.16	<i>Bilan de la formulation Mixte continue.</i>	173

4.1	<i>Coordonnées des cinq capteurs.</i>	192
4.2	<i>Données du matériau.</i>	201
4.3	<i>Mise en données du cas de compression du triaxe.</i>	204
C.1	<i>Erreur moyenne du schéma TGD en fonction de la conductivité k.</i>	217
C.2	<i>Erreur moyenne du schéma TGD en fonction de la masse volumique ρ.</i>	217
C.3	<i>Erreur moyenne du schéma TGD en fonction de la capacité calorifique c.</i>	217
E.1	<i>Valeurs du flux des contraintes pour une température $T = 600^{\circ}\text{C}$ et 900°C.</i>	223
E.2	<i>Valeurs du flux des contraintes pour une température $T = 950^{\circ}\text{C}$.</i>	223
E.3	<i>Valeurs du flux des contraintes pour une température $T = 1000^{\circ}\text{C}$.</i>	223
E.4	<i>Valeurs du flux des contraintes pour une température $T = 1050^{\circ}\text{C}$ et 1200°C.</i>	223
E.5	<i>Valeurs des données du matériau en fonction de la température.</i>	224

Bibliographie

- [Agassant et al. 1996] J. F. AGASSANT, P. AVENAS, J. P. SERGENT, B. VERGNES, et M. VINCENT, *La mise en forme des matières plastiques*, Lavoisier Tec et doc, troisième édition, 1996.
- [Aliaga 2000] C. ALIAGA, *Simulation numérique par éléments finis en 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [Aziz-Babuška 1972] A. K. AZIZ ET I. BABUŠKA, *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Academic Press, New-York, 1972.
- [Baranger-Sandri 1996] J. BARANGER ET D. SANDRI, *Quelques propriétés de la méthode de Galerkin discontinue. Application aux fluides viscoélastiques*, *Analyse numérique*, 322 (1996), pp. 785–788.
- [Barboza 2004] J. BARBOZA, *Traitement du contact entre corps déformables et calcul parallèle pour la simulation 3D du forgeage multicorps*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004.
- [Batkam 2002] S. BATKAM, *Thermique multidomaine en simulation numérique du remplissage 3D*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002.
- [Batkam-Coupez 2001] S. BATKAM ET T. COUPEZ, *A new multidomain approach for the thermal problem solution in 3D mold filling*, *Proceedings of the 4th international ESAFORM Conference on Material Forming*, 2001.
- [Baumann-Oden 1999] C. E. BAUMANN ET J. T. ODEN, *A discontinuous hp finite element method for convection-diffusion problems*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 175 (1999), pp. 311–341.
- [Beck 1992] J. V. BECK, *Analysis of quenching and heating processes using inverse heat transfer method*, *Proceedings of the first international conference on quenching and control of distortion*, Chicago, Illinois, USA, sept-1992.
- [Bergman 2004] G. BERGMAN ET M. OLDENBURG, *A finite element model for thermomechanical analysis of sheet metal forming*, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 59 (2004), pp. 1167–1186.
- [Biswas et al. 1994] R. BISWAS, K. DEVINE, ET J. FLAHERTY, *Parallel, Adaptive Finite Element Methods for Conservation Laws*, *Applied Numerical Mathematics*, 14 (1994), pp. 255–283.
- [Bousseta 2005] R. BOUSSETA, *Estimateurs d'erreur et remaillage adaptatif : application à la simulation 3D des procédés de mise en forme des matériaux*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005.
- [Boyère 1999] E. BOYÈRE, *Contribution à la modélisation numérique thermomécanique tridimensionnelle du forgeage*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999.
- [Brezis 1991] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Masson, Paris, 1991.

- [Brezzi-Fortin 1991] F. BREZZI ET M. FORTIN, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, volume 15 de *Springer Series in Computational Series*, Springer Verlag, New-York, 1991.
- [Brooks-Hughes 1982] A. N. BROOKS ET T. J. R. HUGHES, *Streamline upwind/ Petrov galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations*, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 32 (1982), pp. 199–259.
- [César et al. 1996] K. CÉSAR DE SÁ, L. COSTA SOUSA ET M. L. MADUREIRA, *Simulation model for hot and cold forging by mixed methods including adaptative mesh refinement*, *Engineering Computations*, 13 (1996), pp. 339–360.
- [Chenot et al. 1992] J. L. CHENOT, Y. TRONEL ET N. SOYRIS, *Finite element calculation of thermo-coupled large deformation in hot forging*, *International Conference on heat transfer*, 1992.
- [Chambarel-Pumborios 1992] A. CHAMBAREL ET M. PUMBORIOS, *High-precision numerical simulation with autoadaptative grid technique in nonlinear thermal diffusion*, *Numerical Heat Transfer, Part B*, 21 (1992), pp. 199–216.
- [Ciarlet 1991] P. G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1991.
- [Cockburn et al. 2000] B. COCKBURN, G. E. KARNIADAKIS, ET C. W. SHU, *Discontinuous Galerkin Methods. Theory, Computation and Application*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [Colonna 1992] F. COLONNA, *Modélisation numérique du refroidissement des rails*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1992.
- [Codina 1998] R. CODINA, *Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation*, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 156 (1998), pp. 185–210.
- [Costes 2004] F. COSTES, *Modélisation thermomécanique tridimensionnelle par éléments finis de la coulée continue d'aciers*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004.
- [Coupez 1991] T. COUPEZ, *Grandes transformations et remaillage automatique*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1991.
- [Coupez 1994] T. COUPEZ, *a mesh improvement method for 3D automatic remeshing*, in N.P Weatherill et al., editor, *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields*, pp. 615–626, Pineridge Press, 1994.
- [Coupez 1996] T. COUPEZ, *Parallel adaptative remeshing in 3D moving mesh finite element*, in B.K. Soni et al., editor, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation*, vol. 1, pp. 783–792, Mississippi State University, 1996.
- [Coupez-Baranger 2002] T. COUPEZ ET J. BARANGER, *Convection et diffusion pour des éléments finis discontinus P_0 . Définition du gradient et de la divergence d'une interpolation P_0* , 2002.
- [D'Alvise 2002] L. D'ALVISE, *Finite Element modelling of the Inertia Friction Welding process*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002.
- [Donea 1984] J. DONEA, *A Taylor Galerkin method for convective transport problems*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20 (1984), pp. 101–119.
- [Duvaut 1998] G. DUVAUT, *Mécanique des milieux continus*, Dunod, Paris, 1998.
- [Ern-Germond 2000] A. ERN ET J. L. GERMOND, *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*, Springer, 2000.
- [Fachinotti 2003] V. D. FACHINOTTI, *On the solution of the non-linear transient thermal equation involving phase-change effects in THERCAST*, Note interne, 2003.
- [Fachinotti 2004] V. D. FACHINOTTI and M. BELLET, *A diffusion-split method to deal with thermal shocks using standard linear tetrahedral finite elements*, *Proceedings of the 8th international NUMIFORM Conference*, Columbus, 13–17 June 2004, pp. 2258–2264.

- [Fernandes et al. 1999] J. L. M. FERNANDES, J. M. C. RODRIGUES ET P. A. F. MARTINS, *Combined finite element-boundary element thermo-mechanical analysis of metal forming processes*, Journal of Materials Processing Technology, 87 (1999), pp. 247–257.
- [Franca-Haghighi 1994] A. S. FRANCA ET K. HAGHIGHI, *Adaptative finite element analysis of transient thermal problems*, Numerical Heat Transfer, 26 (1994), pp. 273–292.
- [French 1998] D. A. FRENCH, *Discontinuous Galerkin finite element method for a forward-backward heat equation*, Applied Numerical Mathematics, 28 (1998), pp. 37–44.
- [Freund 2001] J. FREUND, *The space-continuous-discontinuous Galerkin method*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 190 (2001), pp. 3461–3473.
- [Gruau 2004] C. GRUAU, *Génération des métriques pour adaptation anisotrope des maillages : applications à la mise en forme des matériaux*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004.
- [Heinrich 2003] A. HEINRICH, *Modélisation thermomécanique de la coulée continue d’acier en 2 dimensions*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2003.
- [Hughes et al. 1989] T. J. R. HUGHES, L. P. FRANCA, ET G. M. HULBERT, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 73 (1989), pp. 173–179.
- [Idesman 2000] A. IDESMAN, R. NIEKAMP, ET E. STEIN, *Continuous and discontinuous Galerkin methods with finite element in space and time for parrallel computing of viscoelastic deformation*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 190 (2000), pp. 1049–1063.
- [Incropera-DeWitt 2001] F. P. INCROPERA ET D. P. DEWITT, *Fundamentals of heat and mass transfer*, 5th edition, John Wiley and Sons, New-York, 2001.
- [Jamet 1978] P. JAMET, *Galerkin-type approximations which are discontinuous in time for parabolic equations in a variable domain*, SIAM J. Numer. Anal., 15 (1978), pp. 912–928.
- [Jaouen 1998] O. JAOUEN, *Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l’analyse thermomécanique du refroidissement des pièces coulées*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1998.
- [Khelifa et al. 1995] A. KHELIFA, J. L. ROBERT, ET Y. OUELLET, *L’approximation quadratique et l’approche Taylor-Galerkin pour la modélisation de problèmes transitoires de convection-diffusion*, Revue européenne des éléments finis, 4 (1995), pp. 127–158.
- [Kim 2001] C. H. KIM, *On the numerical computation for solving the two-dimensional parabolic equations by space-time finite element method*, JSME International Journal, 44 (2001), pp. 434–438.
- [Laroussi 2003] M. LAROUSSE, *Analyse de sensibilité par la méthode de l’état adjoint-Application au forgeage 3D*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2003.
- [Lesaint-Raviart 1974] P. LESAIN ET P. A. RAVIART, *On a finite element method for solving the neutron transport equation*, Mathematical Aspects of Finite Element in Partial Differential Equations, (1974), pp. 89–145.
- [Lewis et al. 1991] R. W. LEWIS, H. C. HUANG, A. S. USMANI ET J. T. CROSS, *Finite element analysis of heat transfer and flow problems using adaptative remeshing including application to solidification problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32 (1991), pp. 767–781.
- [Li-Wiberg 1996] X. D. LI ET N. E. WIBERG, *Structural dynamic analysis by a time-discontinuous Galerkin finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39 (1996), pp. 2131–2152.
- [Makridakis-Babuška 1997] C. G. MAKRIDAKIS ET I. BABUŠKA, *On the stability of the discontinuous Galerkin method for the heat equation*, SIAM J. Numer. Anal., 34 (1997), pp. 389–401.

- [Manzari 1998] M. T. MANZARI ET M. MANZARI, *A mixed approach to finite element analysis of hyperbolic heat conduction problems*, International Journal for Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, 8 (1998), pp. 83–96.
- [Manzari 1999] MANZARI M. T. and MANZARI M., *On numerical solution of hyperbolic heat conduction*, Communications in numerical methods in engineering, 15 (1999), pp. 853–866.
- [Menai 1995] M. MENAI, *Simulation numérique tridimensionnelle de refroidissement des pièces en fonderie : approche thermomécanique*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1995.
- [Micari et al. 1995] F. MICARI, L. FRATINI, ET N. ALBERTI, *An explicit Model for the Thermal-Mechanical Analysis of Hot Metal Forming Processes*, Annals of the CIRP, 44 (199), pp. 193–196.
- [Mocellin-Terzolo 2004] K. MOCELLIN, ET L. TERZOLO, *Modelling of tool heating in hot forging processes*, 7th International Esaform Conference, Trondheim, Norway, 28-30 April 2004.
- [Mohan-Tamma 1994] R. V. MOHAN ET K. K. TAMMA, *Finite element/finite volume approaches with adaptative time stepping strategies for transient thermal problems*, Journal Sadhana, Ind. Academy of Engineering Sciences, 19 (1994), pp. 765–783.
- [Murthy-Mathur 1998] J. Y. MURTHY ET S. R. MATHUR, *Computation of anisotropic conduction using unstructured meshes*, Journal of Heat Transfer, 120 (1998), pp. 583–591.
- [Oden et al. 1998] J. T. ODEN, I. BABUŠKA, ET C. E. BAUMANN, *A Discontinuous hp Finite Element Method for Diffusion Problems*, Journal of Computational Physics, 146 (1998), pp. 491–519.
- [Ortega 1970] J. M. ORTEGA, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, San Diego, Academic Press, 1970.
- [Ortiz 1992] P. ORTIZ, *A Taylor Galerkin Implicit-Explicit. Generalisation for Convective Diffusion Equations*, Computational Methods in Water Ressources IX : Numerical Methods in Water Ressources, 1992 pp. 165–172.
- [Papastavrou-Verfürth 2000] A. PAPASTAVROU ET R. VERFÜRTH, *A posteriori error estimators for stationary convection-diffusion problems : a computational comparison*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 189 (2000), pp. 449–462.
- [Pelissou-Massoni 2003] C. PELISSOU ET E. MASSONI, *Résolution numérique du problème thermique instationnaire au cours de la simulation par éléments finis des procédés de mise en forme*, 6ème Colloque National en Calcul des structures, Giens (2003), tome3.
- [Pelissou 2003] C. PELISSOU ET E. MASSONI, *Résolution numérique du problème thermique instationnaire au cours de la simulation par éléments finis des procédés de mise en forme*, 16ème Congrès Français de Mécanique, Nice, 1-5 sept 2003, Cdrom.
- [Pelissou- et al. 2004] C. PELISSOU, E. MASSONI ET J. L. CHENOT, *A mixed continuous formulation for solving thermo-mechanical equilibrium during hot forming process simulation*, 8th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Columbus, 13-17 June 2004, p. 2276–2284.
- [Pelissou-Massoni 2004] C. PELISSOU, E. MASSONI ET J. L. CHENOT, *A mixed temperature/heat flux formulation for solving unsteady thermal problem during forming process simulation*, 10th International Conference Metal Forming, Krakovien, 19-22 sept 2004, publié dans the "steel GRIPS-Journal of Steel and Related Materials", p. 2407–412.
- [Pelissou 2004] C. PELISSOU, E. MASSONI ET J. L. CHENOT, *Comparison of some finite element methods for solving 3D heat transfer problems*, Revue Européenne des Eléments Finis, 13 (2004), pp. 679–690.
- [Pelletier et al. 1994] D. PELLETIER, F. ILINCA ET J. F. HÉTU, *Adaptative remeshing for convective heat transfer with variable fluid properties*, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 8 (1994), pp. 687–694.

- [Pichelin 1998] E. PICHELIN, *Calcul par éléments finis du remplissage 3D pour des fluides visqueux incompressibles. Application à l'injection*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1998.
- [Pichelin-Coupez 1999] E. PICHELIN ET T. COUPEZ, *A Taylor discontinuous Galerkin method for the thermal solution in 3D mold filling*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 178 (1999), pp. 153–169.
- [Prax-Sadat 1998] C. PRAX ET H. SADAT, *Mise en oeuvre d'une méthode d'approximation diffuse adaptative pour la résolution des équations de diffusion et de transport*, Rev Gén Therm, 37 (1998), pp. 39–48.
- [Probert et al. 1992] E. J. PROBERT, O. HASSAN, K. MORGAN ET J. PERAIRE, *Adaptative explicit and implicit finite element methods for transient thermal analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 35 (1992), pp. 655–670.
- [Ramberg-Osgood 1943] W. RAMBERG ET W. R. OSGOOD, , NACA Technical Note N° 902, 1943
- [Rappaz et al. 1998] M. RAPPAZ, M. BELLET ET M. DEVILLE, *Modélisation numérique en science et génie des matériaux, volume 10 du traité des matériaux*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.
- [Raviart-Thomas 1998] P. A. RAVIART ET J. M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1998.
- [Soyris 1990] N. SOYRIS, *Modélisation tridimensionnelle du couplage thermique en forgeage à chaud*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1990.
- [Suquet 1982] P. SUQUET, *Plasticité et homogénéisation*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1982.
- [Terzolo 2004] L. TERZOLO, *Vers une prédiction de la durée de vie des outils de forge à chaud par une détermination numérique du régime thermique établi et de l'usure abrasive*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004.
- [Traoré 2001] K. TRAORÉ, *Simulation thermomécanique du laminage circulaire. Développement d'une formulation quasi-Eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
- [Thomée 1997] V. THOMÉE, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer, New York, 1997.
- [Thompson-Pinsky 1996] L. L. THOMPSON ET L. L. PINSKY, *A space-time element method for the exterior acoustics problem*, Journal of Acoustical Society of America, 99 (1996), pp. 3297–3311.
- [Tronel 1993] Y. TRONEL, *Contributiun à la modélisation thermo-mécanique et physique du forgeage à chaud*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1993.
- [Wagoner-Chenot 2001] R. H. WAGONER and ET J. L. CHENOT, *Metal Forming Analysis*, Cambridge University Press, 2001.
- [Werder et al. 2001] T. WERDER, K. GERDES, D. SCHÖTZAU, ET C. SCHWAB, *hp-Discontinuous Galerkin time stepping for parabolic problems*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 190 (2001), pp. 6685–6709.
- [Zlámál 1977] M. ZLÁMAL, *Finite element methods for nonlinear parabolic equations*, R.A.I.R.O. Numerical Analysis, 11 (1), pp. 93–107 (1977).
- [Zienkiewicz-Taylor 1989] O. C. ZIENKIEWICZ ET R. L. TAYLOR, *Finite Element Method: The Basis. volume 1*, Mc Graw-Hill Book Compagny, 1989.

ce document a été compilé le 9 décembre 2005

Résumé

La prise en compte de la thermique couplée au modèle mécanique continue à poser des défis à la modélisation numérique, et plus particulièrement lors de la simulation du procédé de forgeage à chaud (déformations importantes de la pièce chaude au contact d'outils plus froids). Cette thématique d'actualité encore peu ou mal traitée dans les codes de calculs classiques (présence de problèmes de stabilité et de convergence dus aux fortes non linéarités des modèles thermomécaniques) nous amène à mettre au point une méthodologie numérique satisfaisante de l'équilibre thermique en vue de simuler un tel couplage, avec un bon compromis entre la précision de l'estimation du champ de température et le temps de résolution. Ainsi, trois modèles numériques sont introduits et intégrés dans le code éléments finis Forge3[®], tous basés sur une formulation mixte à deux champs en température/flux de chaleur pour décrire le problème thermique instationnaire.

- Deux modèles basés sur la méthode de Galerkin Discontinue et l'élément fini constant P_0 sont d'abord présentés :
 - * le schéma explicite Taylor Galerkin Discontinu (TGD) associé à des éléments finis mixtes discontinus P_0/P_0 et à un développement de Taylor explicite,
 - * le modèle Galerkin Discontinu Implicite (GDIMP), notre première méthode qui est une amélioration du schéma TGD avec une formulation plus précise pour l'estimation du flux (éléments finis mixtes P_0/P_0^+) et une convergence plus rapide (schéma d'Euler implicite).
- Notre nouvelle formulation, la formulation Mixte continue basée sur l'élément fini mixte linéaire P_1/P_1 et sur un schéma temporel implicite.

Tout au long de ce travail, ces méthodes numériques sont décrites, évaluées, validées (solutions analytiques ou résultats expérimentaux) comparées et soumises à des discussions critiques quant à leur efficacité et leur robustesse.

Mots-clef : résolution problème thermique instationnaire, formulation mixte, Galerkin Discontinu, éléments finis mixtes linéaires, schéma temporel implicite, choc thermique.

Abstract

Many challenges and difficulties persist in the numerical simulations, and particularly during hot forging processes simulation, when strong thermomechanical couplings must be taken into account. But this thematic is still few or badly treated with the classical softwares (problems of stability and convergence due to large nonlinear thermomechanical couplings). Therefore, this work mainly consists in the improvement of a solving methods for the thermal problem with a good compromise between the precision of the temperature field and the calculate time. For this study, three numerical methods are implemented in the Forge3[®] finite element software. They are based on a mixed formulation with two fields, temperatre/heat flux, to describe the unsteady thermal problem.

- Two models based on the Discontinuous Galerkin method and the P_0 constant finite element are firstly presented :
 - * Explicit Taylor Discontinuous Galerkin (TDG) with a mixed finite element P_0/P_0 and an explicit Taylor expansion,
 - * Implicit Discontinuous Galerkin model (GDIMP) : our first improved TDG method with a more local formulation for the flux estimation (interpolation P_0/P_0^+) and a farther convergence (implicit Euler scheme).
- Our original formulation, the Mixed Continuous Formulation based on the linear mixed finite element P_1/P_1 and an implicit time integration.

These three numerical models are described, evaluated, validated (analytical solutions or experimental results) and compared with a serious and critical discussion (define the most appropriate, robust and efficient method for the hot forging process simulation).

Keywords : unsteady thermal problem, mixed formulation, Discontinuous Galerkin, continuous mixed finite elements, implicit time integration, thermal shock.